الحساب المثلثي

القدرات المنتظرة

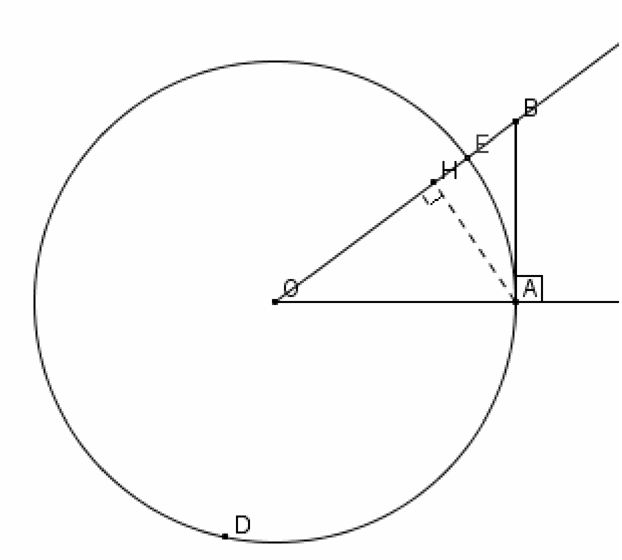
*- استعمال المحسبة العلمية لتحديد قيمة مقربة ازاوية محددة بأحد نسبها المثلثية والعكس.

*- التمكن من النسب المثلثية للزوايا الاعتيادية وتطبيق مختلف العلاقات

I- تذكير و اضافات

1- أنشطة للتذكير

تمرين1



نعتبر الشكل التالي حيث $OA=4$ و $AB=3$ و H المسقط العمودي لـ A على (OB) :

1- أحسب OB

2- أ/ أحسب $\cos\left(\widehat{AOB}\right)$ ثم استنتج قيمة مقربة لقياس الزاوية $\left[\widehat{AOB}\right]$

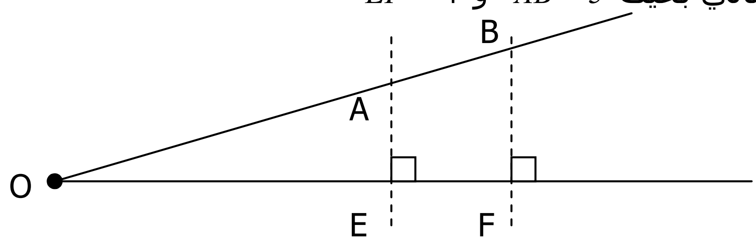
ب/ استنتج المسافة OH

3- أحسب $\tan\left(\widehat{AOB}\right)$ ثم استنتج $\sin\left(\widehat{AOB}\right)$

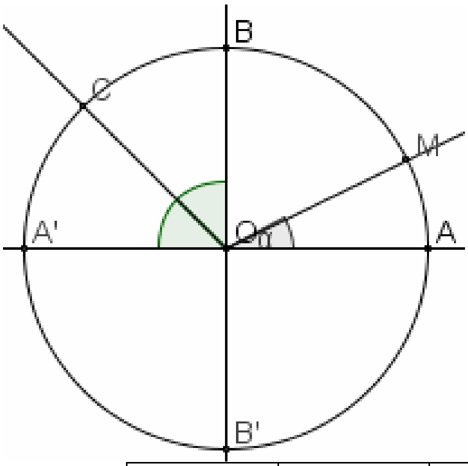
4- حدد قيمة مقربة لقياس الزاوية $\left[\widehat{ADE}\right]$

تمرين2

نعتبر الشكل التالي بحيث $AB=5$ و $EF=4$



أحسب $\cos\left(\widehat{AOE}\right)$ ثم استنتج $\sin\left(\widehat{AOE}\right)$



1- وحدات قياس الزوايا و الاقواس الهندسية – زاوية مركزية

1- أنشطة

لتكن (C) دائرة مركزها O و شعاعها R. نعتبر A و B و C و A' و B' و M نقط من (C) بحيث α قياس للزاوية الهندسية $\left[\widehat{AOM}\right]$ بالدرجة

1- اتمم الجدول التالي

الزاوية المركزية	$\left[\widehat{AOA'}\right]$	$\left[\widehat{AOB}\right]$	$\left[\widehat{AOC}\right]$	$\left[\check{AOB'}\right]$	$\left[\widehat{AOM}\right]$
قياس الزاوية المركزية بالدرجة					$\alpha°$
طول القوس الهندسية المرتبطة بها					l

2- بين أن $180°$ و $90°$ و $135°$ و $270°$ متناسبة و πR و $\frac{\pi}{2}R$ و $\frac{3\pi}{4}R$ و $\frac{3\pi}{2}R$ على التوالي

3- حدد l بدلالة α و π و R

4- لتكن M' نقطة من (C) حيث طول القوس الهندسية $[AM']$ هو R.

حدد β قياس الزاوية المركزية $\left[\widehat{AOM'}\right]$ بالدرجة.

2- وحدات قياس الزوايا

لقياس الزوايا هناك ثلاث وحدات هي الدرجة و الغراد و الراديان.

أ/ تعريف الراديان

الراديان هو قياس زاوية مركزية، في دائرة شعاعها R ، تحصر قوسا دائرية طولها R .
نرمز لها بـ rd أو rad

ملاحظة $\pi rd = 200gr = 180^{\circ}$ (gr : يرمز للغراد)

ب/ نتيجة

إذا كان x قياس زاوية بالراديان و y قياسها بالدرجة و z قياسها بالغراد فان $\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180} = \frac{z}{200}$

ج/ قياس قوس هندسية قياس قوس هندسية هو قياس الزاوية المركزية التي تحصره.

د/ طول قوس هندسية

إذا كان α قياس قوس هندسية بالراديان، في دائرة شعاعها R ، فان طول هذه القوس هو αR.

ملاحظة

طول قوس هندسية، في دائرة شعاعها 1 هو قياس الزاوية المركزية التي تحصرها.

تمارين تطبيقية

تمرين1

اتمم الجدول التالي

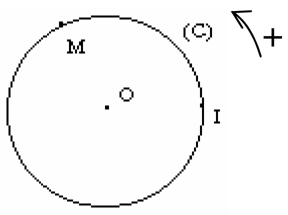
قياس زاوية بالدرجة	$90°$		$45°$	$30°$	$0°$
قياسها بالراديان		$\frac{\pi}{3}$			

تمرين2

ليكن ABC مثلثا متساوي الاضلاع حيث $AB = 5cm$ و نعتبر (C) الدائرة التي مركزه A و تمر من B. أحسب l طول القوس الهندسية المحصورة بالزاوية المركزية $[\widehat{BAC}]$

II- الدائرة المثلثية

1- توجيه دائرة - توجيه مستوى

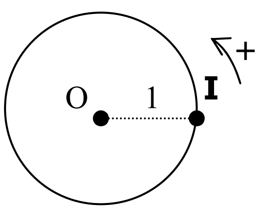


لتكن (C) دائرة مركزها O و شعاعها R و I نقطة من (C).
لو أردنا أن ننطلق من I لندور حول (C) ، لوجدنا أنفسنا أمام منحيين .
توجيه الدائرة (C) هو اختيار أحد المنحيين منحى موجبا (أو مباشرا)
و الآخر منحى سالبا (أو غير مباشر).
عادة نأخذ المنحى الموجب المنحى المعاكس لحركة عقارب الساعة .
النقطة I تسمى أصل الدائرة (C).

عندما توجه جميع دوائر المستوى توجيها موحدا فإننا نقول إن المستوى موجه.

2- الدائرة المثلثية

تعريف الدائرة المثلثية هي دائرة شعاعها1 مزودة بنقطة أصل و موجهة توجيها موجبا.



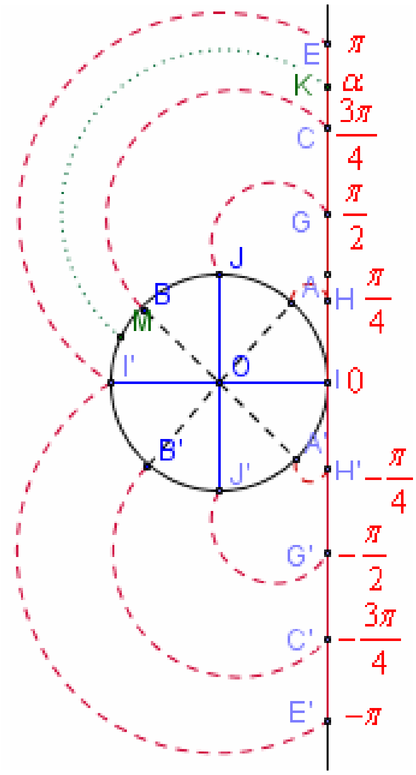
III –الأفاصيل المنحنية.

1- الأفصول المنحني الرئيسي لنقطة على الدائرة المثلثة

لتكن (C) دائرة مثلثية أصلها I. نعتبر المجال $]-\pi;\pi]$ حيث 0 أفصول I في المحور العمودي على (OI). حدد محيط الدائرة وشعاع الدائرة.

إذا لففنا القطعة الممثلة للمجال $]-\pi;\pi]$ على الدائرة (C) نلاحظ أن كل عدد α من $]-\pi;\pi]$ ينطبق مع نقطة وحيدة M من (C) و كل نقطة M من (C) تمثل عدد وحيد α من $]-\pi;\pi]$

العدد α يسمى الافصول المنحني الرئيسي لـ M



خاصية و تعريف

لتكن (C) دائرة مثلثية أصلها I.

كل نقطة M من (C) تمثل عدد وحيد α من $]-\pi;\pi]$ و كل عدد α من $]-\pi;\pi]$ يمثل نقطة وحيدة M من (C).

العدد α يسمى الافصول المنحني الرئيسي لـ M

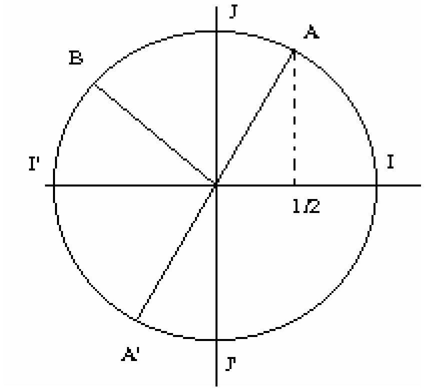
ملاحظة قياس الزاوية الهندسية $\left[\widehat{IOM}\right]$ هو $|\alpha|$ راديان

تمرين1

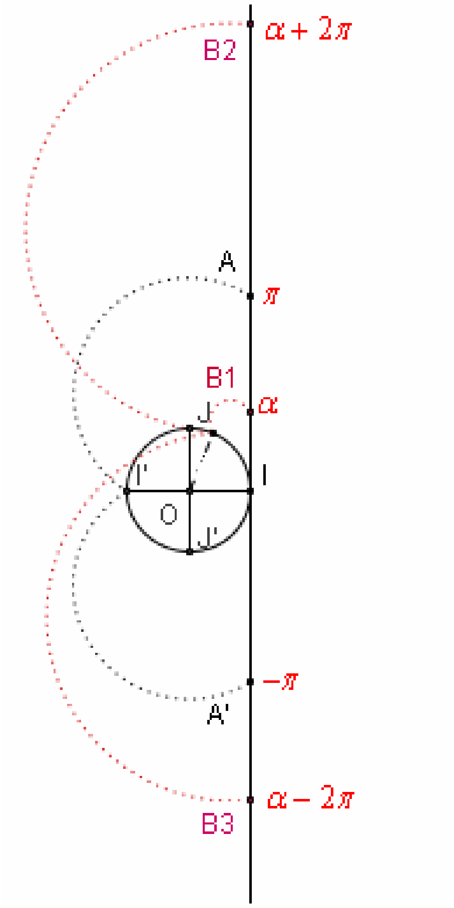
على دائرة مثلثية (C) أصلها I. أنشئ النقط A و B و C و D و E و F و G و H التي افاصيلها المنحنية الرئيسية هي $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{3\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{6}$ و $-\frac{\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{3\pi}{4}$ على التوالي

تمرين2

(C) دائرة مثلثية أصلها I . حدد الأفاصيل المنحنية الرئيسية للنقط I';I ;J ;'J ;A';A ;B الممثلة في الشكل كما يلي



2- الأفاصيل المنحنية لنقطة على الدائرة المثلثة



نعتبر (C) دائرة مثلثية أصلها I. نعتبر المحور $(\Delta)=D(I,E)$ حيث $(OI)\perp(\Delta)$.

لتكن نقطة M من (C) أفصولها المنحني الرئيسي α.

لنحدد كل الأعداد التي تنطبق مع M اذا لففنا المستقيم العددي على (C)

نلاحظ اننا اذا لففنا المستقيم العددي الممثل لـ $\mathbb{R}$ على (C) النقطة M تنطبق مع الأعداد

.... $\alpha-4\pi$; $\alpha-2\pi$; α ; $\alpha+2\pi$; $\alpha+4\pi$ ....

كل هذه الأعداد تسمى الأفاصيل المنحنية لنقطة M

نلاحظ أن هذه الأعداد تكتب بشكل عام عل شكل $\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تعريف

لتكن M نقطة من دائرة مثلثية (C) أصلها I. و ليكن α أفصولها المنحني الرئيسي

كل عدد يكتب على الشكل $\alpha+2k\pi$ بحيث k عنصر من $\mathbb{Z}$ يسمى أفصولا منحنيا للنقطة M.

تمرين حدد الأفاصيل المنحنية للنقطتين A و B ذات الافصولين المنحنيين الرئيسيين $\frac{\pi}{5}$ و $-\frac{2\pi}{3}$ على التوالي

تمرين (C) دائرة مثلثية أصلها I .

نعتبر $\frac{34\pi}{3}$ أفصول منحني لنقطة M . أنشئ M

ب- خاصيات

لتكن M نقطة من دائرة مثلثية (C) أصلها I. و ليكن α أفصولها المنحني الرئيسي

بين اذا كانx و y أفصولين منحنيين للنقطة M فانه يوجد عنصر λ من $\mathbb{Z}$ بحيث $x-y=2\lambda\pi$

خاصية - إذا كان x و y أفصولين منحنيين للنقطة M فانه يوجد عنصر λ من $\mathbb{Z}$ بحيث $x-y=2\lambda\pi$ و نكتب $x\equiv y \quad [2\pi]$ و نقرأ x يساوي y بترديد 2π.

- إذا كان x أفصول منحني للنقطة M فان جميع الأفاصيل المنحنية للنقطة M تكتب على شكل $x+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

تمرين حدد الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة التي إحدى أفاصيلها المنحنية $\alpha=\frac{-227\pi}{6}$

تمرين مثل على الدائرة المثلثية النقط $A;B;C$ التي أفاصيلها المنحنية على التوالي هي $7\pi \quad ; \quad \frac{37\pi}{3} \quad ; \quad \frac{-108\pi}{12}$

تمرين أنشئ على الدائرة المثلثية النقط M_k التي أفاصيلها المنحنية $-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

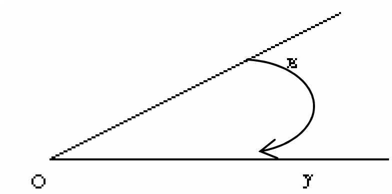
IV– الزوايا الموجهة

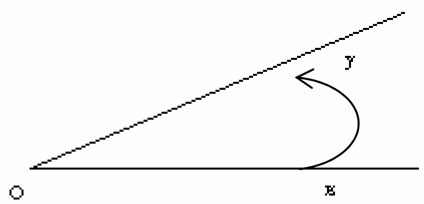
4- الزاوية الموجهة لنصفي مستقيم

أ- تعريف

في المستوى الموجه نعتبر $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم لهما نفس الأصل

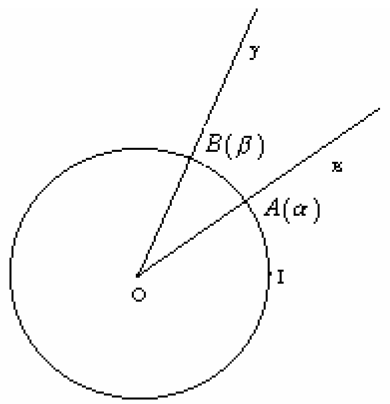
الزوج $([O;x[;[O;y[)$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيم و يرمز لها بالرمز $(\widehat{Ox;Oy})$





ب- قياسات زاوية موجهة لنصفي مستقيم

تعريف وخاصية



لتكن $(\widehat{Ox;Oy})$ زاوية موجهة لنصفي مستقيم ، و (C) دائرة مثلثية مركزها O ، A و B نقطتي تقاطع (C) و نصفي مستقيم $[O;x[$ و $[O;y[$ على التوالي

ليكن α و β أفصولين منحنيين للنقطتين A و B على التوالي .

العدد $\beta-\alpha$ يسمى قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$.

كل عدد حقيقي يكتب على الشكل $\beta-\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ يسمى قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$.

نرمز لقياسات الزاوية $(\widehat{Ox;Oy})$ بالرمز $(\overline{Ox;Oy})$ نكتب $k\in\mathbb{Z}$ $\quad (\overline{Ox;Oy})=\beta-\alpha+2k\pi$

و نكتب أيضا $(\overline{Ox;Oy})\equiv\beta-\alpha \quad [2\pi]$

خاصية و تعريف

لكل زاوية موجهة لنصفي مستقيم قياس وحيد ينتمي إلى المجال $]-\pi;\pi]$ يسمى القياس الرئيسي لهذه الزاوية الموجهة.

خاصية

إذا كان θ قياس للـزاوية الموجهة $(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}})$ فان $\theta+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ قياس للزاوية $(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}})$.

إذا كان α و β قياسين للزاوية الموجهة $(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}})$ فان $\alpha-\beta\equiv 0 \quad 2\pi$

أي $(k\in\mathbb{Z}/ \quad \alpha-\beta=2k\pi)$

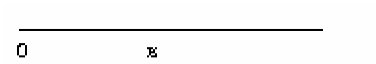
ملاحظات

* إذا كان M نقطة من دائرة مثلثية أصلها I و مركزها O فان الأفاصيل المنحنية للنقطة M هي قياسات الزاوية الموجهة $(\widehat{\overline{OI};\overline{OM}})$ و أن الافصول المنحني الرئيسي لـ M هو القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\widehat{\overline{OI};\overline{OM}})$

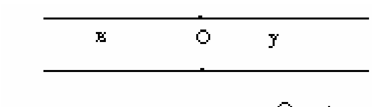
* القيمة المطلقة للقياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}})$ هي قياس الزاوية الهندسية $(\widehat{xOy})$.

بعض الزوايا الخاصة

الزاوية المنعدمة $(\overline{Ox};\overline{Ox})\equiv 0 \quad [2\pi]$

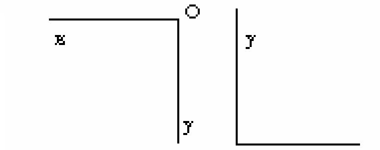


الزاوية المستقيمة $(\overline{Ox};\overline{Oy})\equiv\pi \quad [2\pi]$ $(\overline{Oy};\overline{Ox})\equiv\pi \quad [2\pi]$



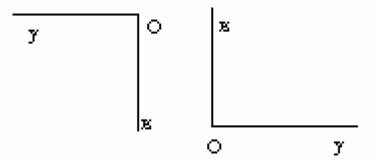
الزاوية القائمة - $(\overline{Ox};\overline{Oy})\equiv\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

الزاوية $(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}})$ زاوية قائمة موجبة



- $(\overline{Ox};\overline{Oy})\equiv-\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

الزاوية $(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}})$ زاوية قائمة سالبة.



تمرين

1- بين أن القياسات التالية تمثل قياسات نفس الزاوية $\frac{601\pi}{6}$; $\frac{-143\pi}{6}$; $\frac{25\pi}{6}$

2- ما هو القياس الرئيسي لزاوية موجهة قياسها أحد القياسات 47π ; -36π ; $\frac{52\pi}{5}$; $-\frac{25\pi}{3}$

3- أنشئ زاوية موجهة $(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}})$ قياسها $\frac{-234\pi}{5}$.

تمرين أنشئ ABC مثلث متساوي الأضلاع حيث $(\overline{AB};\overline{AC})\equiv-\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

ج- علاقة شال ونتائجها

علاقة شال

إذا كان $[O;x[$ و $[O;y[$ و $[O;z[$ ثلاثة أنصاف مستقيم لها نفس الأصل فان

$(\overline{Ox};\overline{Oy})+(\overline{Oy};\overline{Oz})\equiv(\overline{Ox};\overline{Oz}) \quad [2\pi]$

نتائج

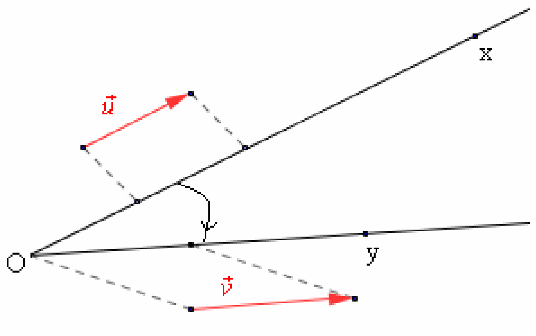
* اذا كان $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم فان $(\overline{Ox};\overline{Oy})\equiv-(\overline{Oy};\overline{Ox}) \quad [2\pi]$

* اذا كان $[O;x[$ و $[O;y[$ و $[O;z[$ ثلاثة أنصاف مستقيم تحقق $(\overline{Ox};\overline{Oy})\equiv(\overline{Ox};\overline{Oz}) \quad [2\pi]$ فان $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم منطبقان.

و هذا يعني أنه اذا كان $[Ox[$ نصف مستقيم و α عددا حقيقيا فانه يوجد نصف مستقيم وحيد $[O;y[$ بحيث $[2\pi]$ $(\widehat{Ox;Oy})\equiv\alpha$.

د- زاوية زوج متجهتين غير منعدمتين

تعريف



لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من المستوى الموجه. و $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم موجهين على التوالي بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

زاوية زوج المتجهتين $(\vec{u};\vec{v})$ هي الزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$ و يرمز لها بالرمز $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

ملاحظة

مجموعة قياسات الزاوية $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ هي مجموعة قياسات الزاوية $(\widehat{Ox;Oy})$.

علاقة شال ونتائجها

علاقة شال

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاثة متجهات غير منعدمة فان

$$(\overline{\vec{u};\vec{v}})+(\overline{\vec{v};\vec{w}})\equiv(\overline{\vec{u};\vec{w}}) \quad [2\pi]$$

نتائج

* اذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين فان $[2\pi]$ $(\overline{\vec{u};\vec{v}})\equiv-(\overline{\vec{u};\vec{v}})$

* اذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاثة متجهات غير منعدمة تحقق $[2\pi]$ $(\overline{\vec{u};\vec{v}})\equiv(\overline{\vec{u};\vec{w}})$ فان $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستقيميتين ولهما نفس المنحى.

تمرين

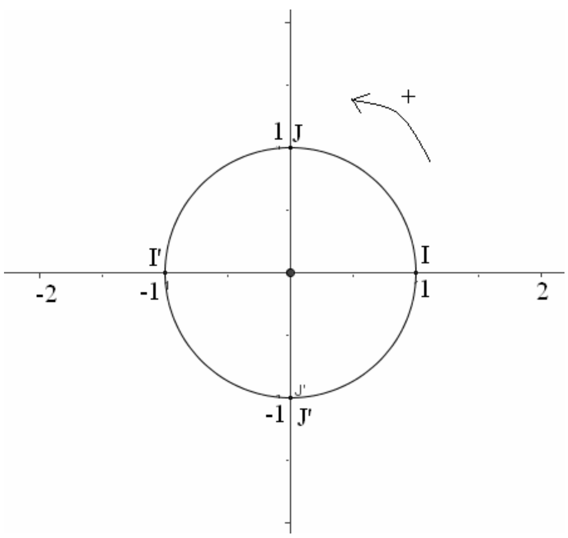
لتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O و أصلها I. نعتبر على (C) النقط التالية المعرفة بأفاصيلها المنحنية $A(\pi)$ $B\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ $E\left(\frac{23\pi}{4}\right)$ $F\left(\frac{-17\pi}{3}\right)$

أعط قياسا لكل من الزاوايا التالية ، ثم حدد القياس الرئيسي لكل منهن

$$(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA}}) \;;\; (\overline{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}}) \;;\; (\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE}}) \;;\; (\overline{\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF}})$$

V - النسب المثلثة

1- المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بالدائرة المثلثة



لتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O و أصلها I .

ولتكن J من (C) بحيث $(\widehat{OI;OJ})$ زاوية قائمة موجبة

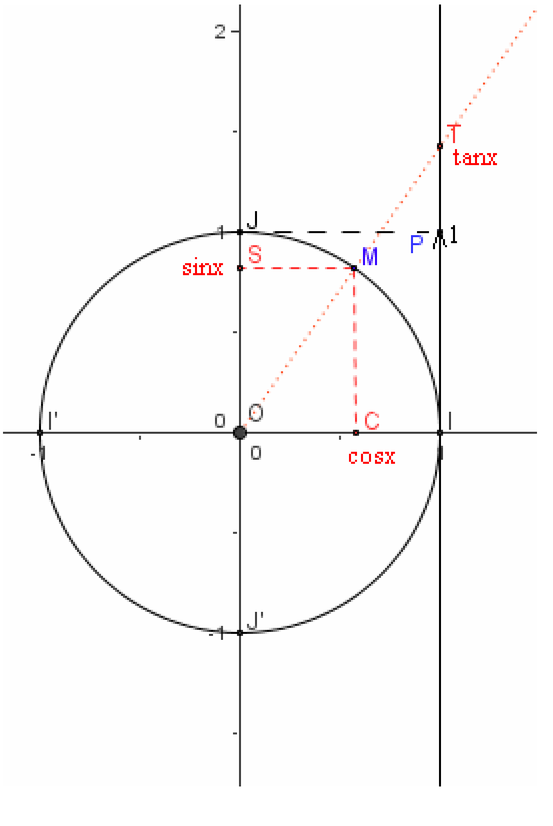
المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ يسمى المعلم المتعامد الممنظم المباشر المرتبط بالدائرة المثلثة (C).

لتكن J' من (C) بحيث $(\widehat{OI;OJ'})$ زاوية قائمة سالبة .

المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ'})$ يسمى المعلم المتعامد الممنظم الغير المباشر المرتبط بالدائرة المثلثة (C).

2- النسب المثلثة

2-1 تعاريف



لتكن (C) دائرة مثلثية و $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بها. لتكن M نقطة من (C) و x أفصولا منحنيا لها . نعتبر C المسقط العمودي لـ M على (OI) و S المسقط العمودي لـ M على (OJ)

*- العدد الحقيقي $\overline{OC}$ أفصول النقطة M في المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ يسمى جيب تمام العدد الحقيقي x

نرمز له بـ $\cos x$ نكتب $\cos x = \overline{OC}$

*- العدد الحقيقي $\overline{OS}$ أرتوب النقطة M في المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ يسمى جيب العدد الحقيقي x .

نرمز له بـ $\sin x$ نكتب $\sin x = \overline{OS}$

*- ليكن Δ المماس لـ (C) عند I و النقطة $P(1;1)$.

لتكن T نقطة تقاطع (OM) و Δ أي

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

العدد الحقيقي $\overline{IT}$ أفصول T في المعلم $(I;P)$ يسمى ظل العدد الحقيقي x نرمز له بـ $\tan x$.

نكتب $\tan x = \overline{IT}$

ملاحظة و اصطلاحات

- إذا كان x أفصول منحنى لنقطة M فان $M(\cos x;\sin x)$

- الدالة $\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \to \cos x\end{array}$ تسمى دالة جيب التمام حيز تعريفها $\mathbb{R}$ يرمز لها بـ $\cos$

- الدالة $\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \to \sin x\end{array}$ تسمى دالة الجيب حيز تعريفها $\mathbb{R}$ يرمز لها بـ $\sin$

- الدالة $\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \to \tan x\end{array}$ تسمى دالة الظل حيز تعريفها $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ يرمز لها بـ $\tan$

2-2- خاصيات

*- كيفما كان وضع M نقطة من (C) أفصولها منحى x النقطة C تنتمي الى القطعة $[II']$ و S تنتمي الى $[JJ']$ حيث $J(0;1)$; $J'(0;-1)$; $I'(-1;0)$; $I(1;0)$

لكل $x \in \mathbb{R}$ $\quad -1 \le \sin x \le 1 \quad -1 \le \cos x \le 1$

*- لكل $x \in \mathbb{R}$ $\quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

*- لكل $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

*- نعلم أن جميع الأعداد الحقيقية التي تكتب $x + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ، أفاصيل منحنية لنفس النقطة M

لكل $x \in \mathbb{R}$ $\quad \sin(x+2k\pi) = \sin x \quad ; \quad \cos(x+2k\pi) = \cos x$

- مهما كانت $M(x + k\pi)$ لدينا $\tan x = \overline{IT}$

لكل $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad \tan(x+k\pi) = \tan x$

حالة خاصة لكل $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ $\tan(x+\pi) = \tan x$

*- بتوظيف الدائرة المثلثية نحصل على

- $\cos(-x) = \cos x \quad ; \quad \sin(-x) = -\sin x$ لكل $x \in \mathbb{R}$

نعبرعن هذا بقولنا ان الدالة cos زوجية و أن الدالة sin فردية.

- $\tan(-x) = -\tan x$ لكل $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

نعبر عن هذا بقولنا ان الدالة tan فردية.

- $\sin(\pi - x) = \sin x \quad ; \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$ لكل $x \in \mathbb{R}$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x \quad ; \quad \cos(\pi + x) = -\cos x$ لكل $x \in \mathbb{R}$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ لكل $x \in \mathbb{R}$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \quad ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ لكل $x \in \mathbb{R}$

3-2- نسب مثلثة اعتيادية

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tanx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

تمارين

تمرين1 أحسب $\sin\frac{-7\pi}{2} \quad ; \sin\frac{53\pi}{6} \quad ; \cos\frac{-37\pi}{4} \quad ; \cos\frac{34\pi}{3}$

تمرين2 أ- حدد $1 + \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{2\pi}{6} + ... + \cos\frac{11\pi}{6}$

ب- بسط $\sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{27\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi + x) - \cos(7\pi - x)$

تمارين

التمرين1

1- حدد الأفصول المنحني الرئيسي المرتبط بالافصولين المنحنيين التاليين $\frac{789\pi}{7}$; $\frac{-214\pi}{5}$

2- مثل على الدائرة المثلثية النقط ذات الأفاصيل المنحنية $\frac{-\pi}{6}$ و $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{23\pi}{2}$ و $\frac{-59\pi}{4}$

3- بين أن الاعداد التالية تمثل الافاصيل المنحنية لنفس النقطة $\frac{601\pi}{6}$; $\frac{-143\pi}{6}$; $\frac{25\pi}{6}$

2- مثل على الدائرة المثلثية النقط M_k التي أفاصيلها المنحنية هي $\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{4}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

4- ليكن x الأفصول المنحني الرئيسي لنقطة M

حدد الأفاصيل المنحنية لنقطة M التي تنتمي الى المجال I في الحالتين التاليتين

a) $x=\frac{\pi}{4}$ $\quad I=\left[\frac{34\pi}{3};\frac{43\pi}{3}\right]$ $\qquad$ b) $x=\frac{-2\pi}{5}$ $\quad I=\left[\frac{-33\pi}{5};\frac{-13\pi}{5}\right]$

5- ضع على دائرة مثلثية النقط M التي أفصولها المنحني x حيث $3x\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

6- ما هو القياس الرئيسي لزاوية موجهة قياسها أحد القياسات

$$47\pi\ ;\ -36\pi\ ;\ \frac{52\pi}{5}\ ;\ -\frac{25\pi}{3}$$

التمرين2

- أنشئ مثلثا ABC متساوي الساقين في الرأس A حيث $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)\equiv-\frac{2\pi}{5}\ [2\pi]$

- حدد بالرديان قياس كل من الزوايا $\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)$ و $\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}}\right)$ و $\left(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AC}}\right)$

التمرين3

على الدائرة المثلثية نعتبر $A\left(\frac{-\pi}{3}\right)$. أعط القياس الرئيسي للزاوية $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}})$ في كل من الحالتين

a) $\frac{27\pi}{2}$ أفصول منحني لنقطة M $\qquad$ b) $(\widehat{\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OM}})\equiv\frac{23\pi}{8}\ [2\pi]$

التمرين4

1- حدد النسب المثلثية للأعداد $\cos\frac{7\pi}{6}$; $\tan-\frac{73\pi}{3}$; $\sin\frac{15\pi}{4}$; $\sin\frac{-23\pi}{3}$

2- إذا علمت أن $\sin\frac{7\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ فأحسب $\cos\frac{7\pi}{8}$; $\tan\frac{7\pi}{8}$; $\sin\frac{\pi}{8}$; $\sin\frac{3\pi}{8}$

$\cos\frac{327\pi}{8}$; $\tan\frac{-78\pi}{8}$; $\sin\frac{-25\pi}{8}$

التمرين5

ليكن $x\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$. نضع $A=\frac{\tan x-1}{\tan^2 x+1}$

1- بين أن $A=\cos x\sin x-\cos^2 x$

2- إذا علمت أن $\sin x=\frac{4}{5}$ فأحسب A

3- إذا علمت أن $A=0$ فاحسب x

التمرين6

1- إذا علمت أن $\sin\frac{7\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ أحسب $\cos\frac{7\pi}{8}$; $\tan\frac{7\pi}{8}$; $\sin\frac{\pi}{8}$; $\sin\frac{3\pi}{8}$

2- بسط $A=\cos^6 x+\sin^6 x+3\cos^2 x\cdot\sin^2 x$ $\quad B=(1+\sin x+\cos x)^2-2(1+\sin x)(1+\cos x)$

$C=2(\cos^6 x+\sin^6 x)-3(\cos^4 x+\sin^4 x)$ $\quad D=\cos^6 x+\sin^6 x+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$

التمرين7

-1 أحسب $\tan\frac{\pi}{5}+\tan\frac{2\pi}{5}+\tan\frac{3\pi}{5}+\tan\frac{4\pi}{5}$

-2 ليكن $x\in\mathbb{R}$

بسط $\sin(\pi-x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\cos(\pi-x)$

$\sin(x-7\pi)+\sin(x+9\pi)$

$\cos(x-\frac{27\pi}{2})-\sin(x+27\pi)$

التمرين8

ليكن $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$. نعتبر $A=\cos^4 x+\sin^4 x-(\sin x\cos x)(\cos x-\sin x)^2$

-1 بين أن $A=1-\sin x\cdot\cos x$

-2 علما أن $\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ أحسب A من أجل $x=\frac{11\pi}{12}$

التمرين9

نضع $P(x)=\cos^6 x+\sin^6 x-\frac{1}{4}$ حيث $x\in[0;\pi]$

-1 بين أن $P(x)=\frac{3}{4}\left(2\cos^2 x-1\right)^2$

-2 أكتب $P(x)$ بدلالة $\tan x$

-3 علما أن $\tan x=-\sqrt{2}$ أحسب $P(x)$ و $\cos x$.

التمرين10

حدد

$A=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$ $\qquad$ $B=1+\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}+.....+\sin\frac{13\pi}{7}$

التمرين11

مثل على دائرة المثلثية النقط M التي أفاصيلها المنحنية α حيث $\cos\alpha=\frac{-3}{4}$، ثم لون بالأحمر جزء الدائرة المثلثية الذي يحتوي على النقط التي أفاصيلها المنحنية β حيث $\cos\beta\leq-\frac{3}{4}$

التمرين12

لون بالأحمر مجموعة النقط M التي أفاصيلها المنحنية θ حيث $\tan\theta\geq 2$

التمرين13

على الدائرة المثلثية انشئ النقطتين M_1 و M_2 الذي أرتوبيهما $\frac{1}{2}$

-1 حدد مجموعة النقط M التي أفاصيلها المنحنية x حيث $\sin x\succ\frac{1}{2}$

-2 حدد مجموعة الأعداد x من $]-\pi;\pi]$ حيث $\sin x\succ\frac{1}{2}$

-3 حدد مجموعة الأعداد x من $[0;2\pi[$ حيث $\sin x\succ\frac{1}{2}$

-4 حدد مجموعة الأعداد x من $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right[$ حيث $\sin x\succ\frac{1}{2}$