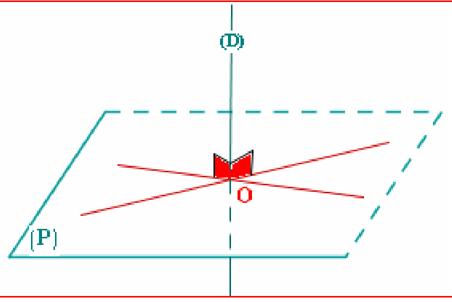
الهندسة في الفضاء
المساحات و الحجوم
تكبير و تصغير

1 ـ تعامد مستقيم ومستوى

تعريف

يكون مستقيم (D) عموديا على مستوى (P) (أو المستوى (P) عموديا على المستقيم (D)) في نقطة O؛إذا كان (D) عموديا في النقطة O على مستقيمين من (P) متقاطعين في النقطة O.



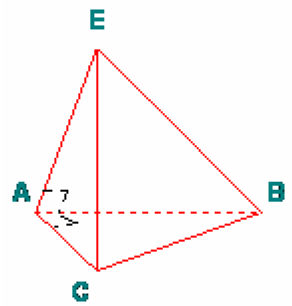
خاصية 1

إذا كان مستقيم (D) عموديا على مستوى (P) فإن (D) يكون عمودياً على جميع المستقيمات الموجودة ضمن (P) .

ملاحظة: في كل مستوى في الفضاء؛ جميع خصائص الهندسة المستوية تبقى صالحة.

تطبيق

ABC مثلث قائم الزاوية في النقطة A و E نقطة من الفضاءلاتنتمي إلى المستوى (ABC) بحيث المثلث ABE قائم الزاوية في A.(أنظر الشكل) بين أن المستقيم (AB) عمودي على المستوى (ACE).



نبين أن المستقيم (AB) عمودي على المستوى(ACE)

* لدينا: ABC و ABE مثلثين قائمي الزاوية في A.

إذن: (AB) عمودي على (AE) و (AC).

* بما أن: (AE) و (AC) من المستوى (ACE).

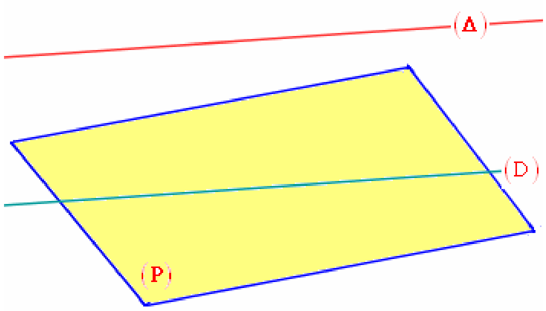
إذن: (AB) عمودي على المستوى(ACE).

2 ـ توازي مستقيم ومستوى

خاصية 2

* كل مستقيم (Δ) لا يشترك مع مستوى (P) في أي نقطة يكون موازيا قطعا لهذا المستوى.

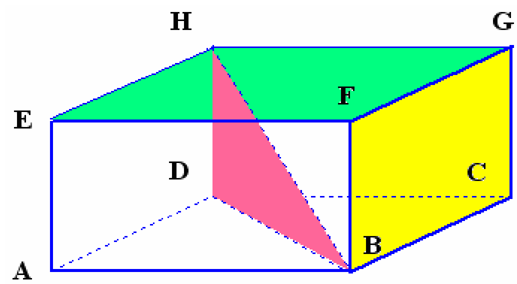
* إذا كان مستقيم (D) ضمن (P) ؛ فإن (D) يوازي (P) .



iktane@yahoo.fr

3 ـ مبرهنة فيثاغورس في الفضاء

مبرهنة فيثاغورس المباشرة ؛ (مثال)



ABCDEFGH متوازي المستطيلات قائم.

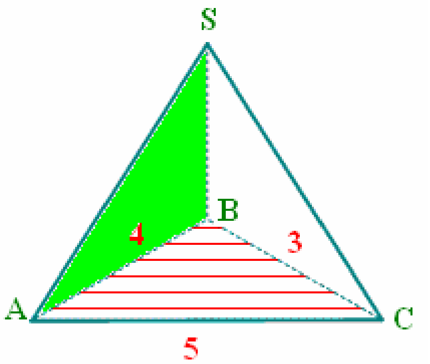
* لدينا (DH) عمودي على المستوى (ACD) (لأن جميع وجوه ABCDEFGH مستطيلات) والمستقيم (DB) ضمن المستوى (ACD)

إذن: (DH) عمودي على (DB) (ح ؛ خاصية 1)

أي: DBH قائم الزاوية في D

وبالتالي فإن: $BH^2=DB^2+DH^2$. (ح؛ م ؛ ف ؛ م)

مبرهنة فيثاغورس العكسية ؛ (مثال)



SABC رباعي الأوجه ؛ (أنظر الشكل).

في المستوى (ABC)

* لدينا: $AB^2+BC^2=4^2+3^2$ و $AC^2=5^2$

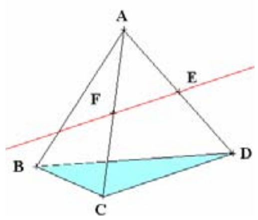
إذن: $AB^2+BC^2=25$ و $AC^2=25$

إذن: $AB^2+BC^2=AC^2$

وبالتالي: ABC قائم الزاوية في B (ح ؛ م ؛ ف ؛ ع) .

خاصية طاليس في الفضاء

خاصية طاليس المباشر؛ (مثال)

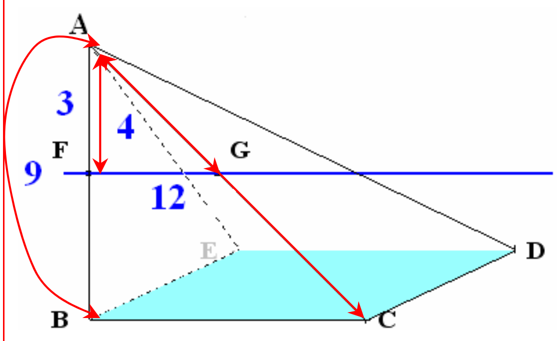


في المستوى (ACD) .

* لدينا: $E\in[AD]$ و $F\in[AC]$ و $(EF)//(CD)$.

* إذن: $\frac{AE}{AD}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{CD}$ (ح . خ . ط . م) .

خاصية طاليس العكسية؛(مثال)



في المثلث ABC

* لدينا: $\frac{AG}{AC}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ و $\frac{AF}{AB}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

إذن: $\frac{AF}{AB}=\frac{AG}{AC}=\frac{1}{3}$

في المستوى (ABC)

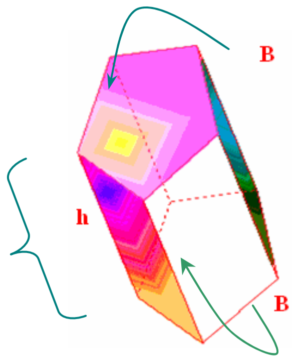
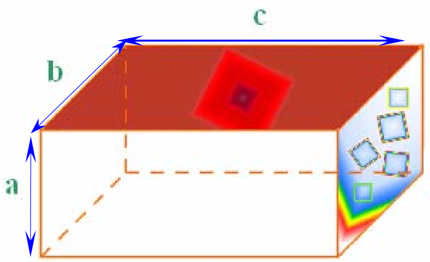
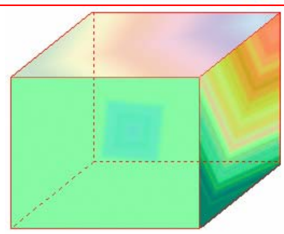
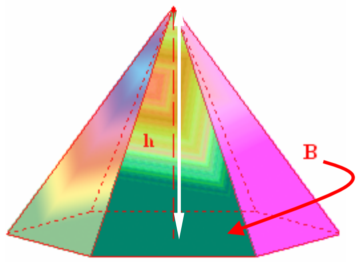
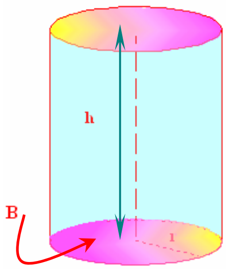
* لدينا: $F\in[AB]$ و $G\in[AC]$ و $\frac{AF}{AB}=\frac{AG}{AC}=\frac{1}{3}$

إذن: $(FG)//(BC)$. (ح . خ . ط . ع) .

iktane@yahoo.fr

5 ـ حساب الحجوم

خلاصة

المجسم	تـعريـفـه	حجمه V ومساحته الكلية S	
الموشور القائم	مجسم أوجهه الجانبية مستطيلات وقاعدته مضلعان متقايسان		$S=2B+ph$ $V=B\times h$ حيث: p و B محيط و مساحة القاعدة على التوالي . h : ارتفاع الموشور القائم.
متوازي المستطيلات	موشور قائم قاعدتاه مستطيلات متقايسة		$S=2(ab+bc+ca)$ $V=a\times b\times c$
المكعب	موشور قائم كل وجه من أوجهه مربع		$S=6a^2$ $V=a^3$
الهرم	مجسم أوجهه الجانبية مثلثات لها رأس مشترك وقاعدته مضلع		$V=\frac{B\times h}{3}$
الأسطوانة القائمة	[مجسم دوراني (يُوَلِّدُهُ دوران مستقيم حول مستقيما يوازيه]؛ السطح الجاني (بعد النشر) مستطيل والقاعدتان قرصان متقايسان.		$S=2(\pi r^2+\pi rh)$ $S=2\pi r(r+h)$ $V=B\times h=\pi r^2h$

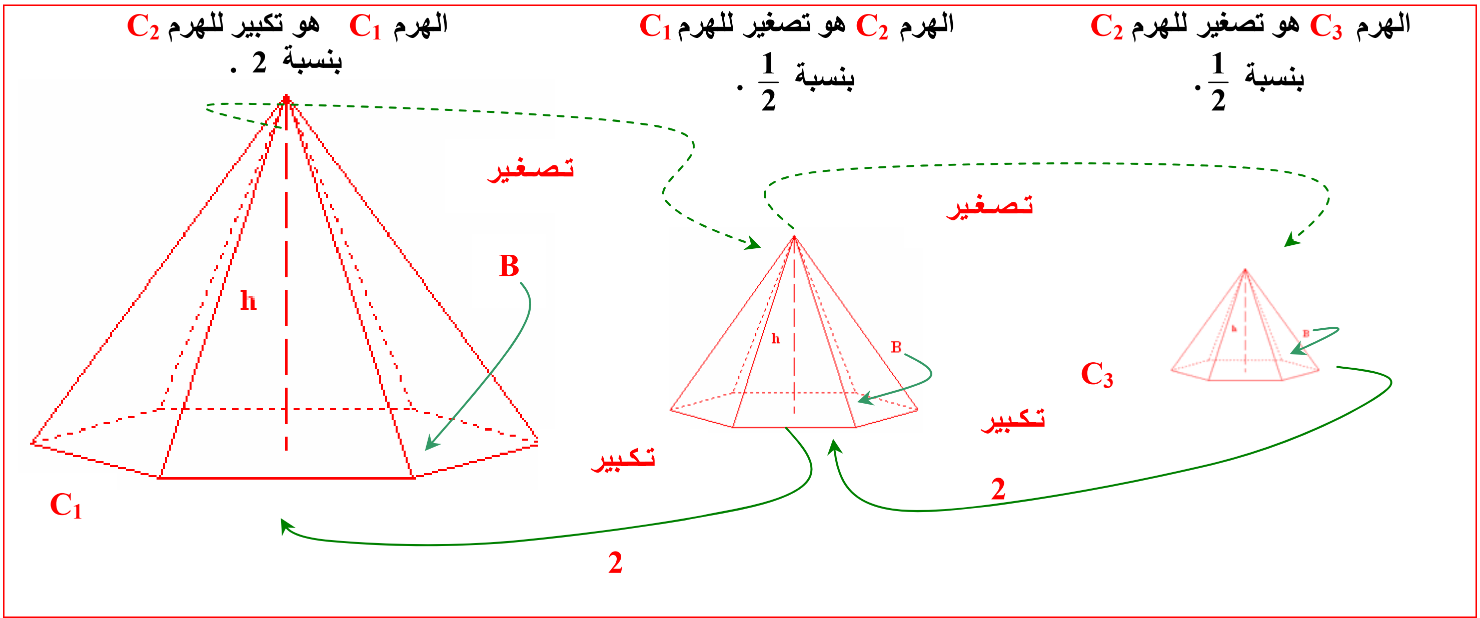
4 ــ تكبير تـصغير

تعريف

انطلاقا من شكل نستخرج شكلا آخر يشابهه
وذالك بضرب أبعاده في عدد حقيقي k موجب قطعا ويخالف 1

iktane@yahoo.fr

مثال



مثال: إذا كان حجم الهرم C_1 هو $4cm^3$ فإن حجم الهرم C_2 هو $4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

و حجم الهرم C_3 هو $4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

ملاحظة

- نحصل على شكل مكبر إذا كان $1 > k$. نقول إننا قمنا بتكبير نسبته k .
- نحصل على شكل مصغر إذا كان $1 > k > 0$. نقول إننا قمنا بتصغير نسبته k .

5 ـ أثر التكبير والتصغير على المساحات والحجوم.

بصفة عامة

عند تكبير أو تصغير مجسم في الفضاء:
إذا ضربنا الأطوال في عدد k موجب قطعا فإن :
المساحات تضرب في k^2 .
الحجم يضرب في k^3 .

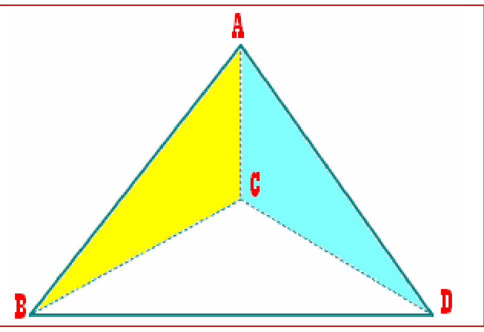
تمارين للبحث

تمرين 1

أنظر الشكل.

ABCD رباعي الأوجه ؛جميع وجوهه مثلثات متساوية الأضلاع.

هل المستقيمان (AC) و (BD) متعامدان؛ علل جوابك ؟



iktane@yahoo.fr

تـمرين 2

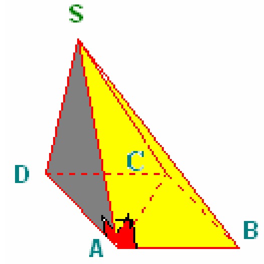
أنظر الشكل جانبه

SABCD هرما قاعدته متوازي الأضلاعABCD

حيث: $(AC) \perp (AB)$ و (SA) عمودي على المستوى $(ABCD)$.

1) بين أن: (CD) عمودي على المستوى (SAC)

2) استنتج أن: $(SC) \perp (CD)$.



تـمرين 3

أنظر الشكل جانبه

SABCD هرما قاعدته متوازي الأضلاع ABCD.

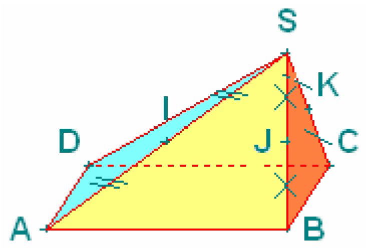
لتكن I و J و k منتصفات القطعِ [SA] و[SB] و[SC] على التوالي.(أنظر الشكل).

1) بين أن المستقيمين (IJ) و (DC) متوازيان.

2) أ ـ بين أن المستقيم (DC) ضمن المستوى (CIJ).

ب ـ حدد تقاطع المستويين (ABCD) و(CIJ).

ج ـ حدد تقاطع المستويين (CIJ) و (SAD).



تـمرين 4

أنظر الشكل جانبه

SABCD هرما منتظما قاعدته مربع ABCD مركزه O بحيث :

$SO = 20cm$ و $BC = 12cm$.

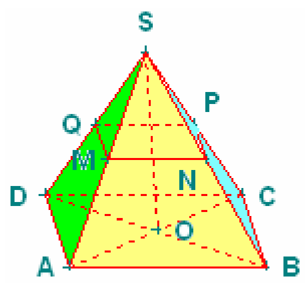
النقط M؛N؛P؛Q هي على التوالي منتصفات القطع [SA] ؛ [SB] ؛[SC]؛[SD].

1) أحسب MN .

2) إذا علمت أن الهرم SMNPQ هو تصغير للهرم SABCD فحدد:

أ ـ نسبة هذا التصغير.

ب - حجم الهرم SMNPQ.



تصحيح تـمرين 1

ABCD رباعي الأوجه؛جميع وجوهه مثلثات متساويّة الأضلاع

إذن: $AB = AC$ و $AC = AD$

أي : $AB = AD$

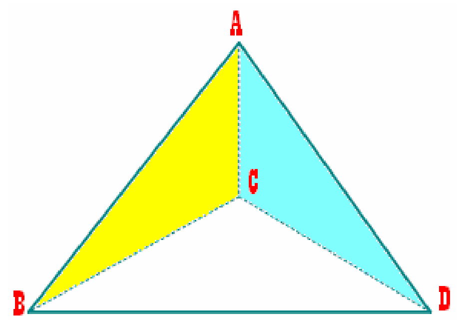
ومنه : A من واسط [BD]. ① (ح ؛ خ؛ مم لواسط قطعة)

أيضا: $BC = CD$

إذن : C من واسط [BD]. ② (ح ؛ خ؛ مم لواسط قطعة)

من ① و ② نستنتج: (AC) واسط [BD] $(A \neq C)$

ومنه: $(BD) \perp (AC)$. (ح تعريف واسط قطعة)



iktane@yahoo.fr

تصحيح تـمرين 2

1) نبين أن: $(CD)\perp(SAC)$.

* لدينا: $(ABCD)$ متوازي الأضلاع و $(AC)\perp(AB)$. (ح ـ مع)

إذن: $(CD)\parallel(AB)$ و $(AC)\perp(AB)$

والتالي: $(CD)\perp(AC)$. ①

* لدينا $(SA)\perp(ABCD)$ و (CD) ضمن المستوى $(ABCD)$ (ح؛مع)

إذن: $(CD)\perp(SA)$ ② ؛ (ح ـ خ : 1)

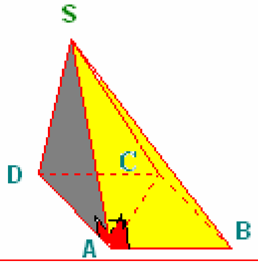
بما أن: (SA) و (AC) من المستوى (SAC)

من ① و ② نستنتج أن: $(CD)\perp(SAC)$

2) استنتج أن: $(SC)\perp(CD)$

* لدينا: $(CD)\perp(SAC)$ و (SC) ضمن (SAC)

إذن: $(SC)\perp(CD)$. (ح ـ خ : 1)



تصحيح تـمرين 3

1) نبين أن: المستقيمان (IJ) و (DC) متوازيان.

❁ (طريقة 1) باستعمال خاصية طاليس المباشرة

❖ في المثلث SAB .

¤ لدينا: $\frac{1}{2}=\frac{SI}{2SI}=\frac{SI}{SA}$ و $\frac{1}{2}=\frac{SJ}{2SJ}=\frac{SJ}{SB}$

(لأن I وJ منتصفي[SA]و[SB]على التوالي ح؛معطيات)

إذن: $\frac{1}{2}=\frac{SJ}{SB}=\frac{SI}{SA}$

ومنه: (IJ) و(AB) متوازيان. (ح ؛ خ ؛ طاليس؛م)

❁ (طريقة 2) باستعمال المستقيمات الموازية لأضلاع مثلث

❖ في المثلث SAB .

¤ لدينا: I و J منتصفي [SA] و[SB] على التوالي)

إذن: (IJ) و (AB) متوازيان (ح؛ خ المثلث)

¤ بما أن: (AB) و(DC) متوازيان.

(لأن ABCD متوازي أضلاع؛ح ؛ معطيات)

إذن: (IJ) و(DC) متوازيان قطعا.

2) أ ـ نبين أن المستقيم (DC) ضمن المستوى (CIJ).

¤ لدينا: (IJ) و(DC) متوازيان قطعا. (ح؛س 1)

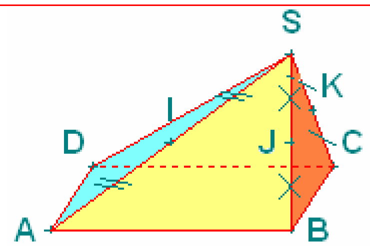
إذن : النقط I و J وC و D مستوائية.

ومنه : (DC) ضمن المستوى (CIJ)

ب ـ تحديد تقاطع المستويين $(ABCD)$ و(CIJ).

¤ لدينا: (CD) ضمن المستوى(CIJ). (ح؛س.2 أ.)
(CD) ضمن المستوى$(ABCD)$.

إذن: (CD) ضمن المستويين (CIJ) و $(ABCD)$.



¤ بما أن: A من المستوى$(ABCD)$ولا تنتمي لِ(CIJ)

إذن: المستويين (CIJ) و $(ABCD)$ مختلفان.

ومنه: تقاطع المستويين (CIJ) و $(ABCD)$ هو(CD)

ج ـ حدد تقاطع المستويين (CIJ) و (SAD).

¤ لدينا: I منتصف [SA] (ح ؛ م).
[SA] ضمن المستوى (SAD).

إذن: I من المستوى (SAD).

و منه : (DI) من المستوى(SAD) . ①

¤ بما أن: (DC) ضمن المستوى (CIJ). (ح؛س2 أ)

إذن: (DI) ضمن المستوى (CIJ) ②

من ① و ② نستنتج أن :

(DI) ضمن المستويين (SAD) و (CIJ).

¤ بما أن: (SAD) و (CIJ)مختلفين.

(لأن A من(SAD) ولا تنتمي إلى المستوى(CIJ))

إذن: (DI) هو تقاطع المستويين (SAD) و (CIJ)

iktane@yahoo.fr

تصحيح تـمرين 4

1) نحسب MN .

* نبين أن: (MN) // (AB).

في المثلث SAB:

¤ لدينا: M و Nمنتصفي[SA]و [SB] على التوالي

إذن: $\frac{SM}{SA} = \frac{SM}{2SM} = \frac{1}{2}$ و $\frac{SN}{SB} = \frac{SN}{2SN} = \frac{1}{2}$

ومنه: $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{2}$.

¤ بما أن: M و N من [SA] و [SB] على التوالي.

إذن: (MN) // (AB). (ح؛خ؛طاليس ؛ع)

بين هذا باستعمال: المستقيمات الموازية لأضلاع مثلث.

في المثلث SAB .

لدينا: (MN) // (AB)و M و P من [SA] و [SB]

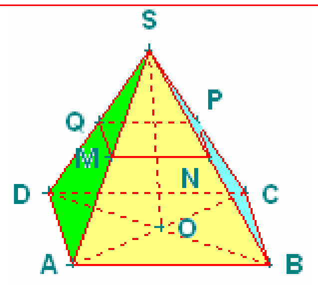
على التوالي.

إذن: $\frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$.(ح؛خ؛طاليس ؛م)

أي: $\frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$

إذن: $MN = \frac{AB}{2} = \frac{12}{6} = 2$.

(AB=BC =12cm ؛ لأن ABCD مربع؛معطيات)



2 ـ الهرم SMNPQ هو تصغير للهرم SABCD.

أ ـ تحديد نسبة هذا التصغير.

¤ لدينا: $\frac{1}{2} = \frac{MN}{AB}$ (من خلال ماسبق)

إذن نسبة التصغير هي $\frac{1}{2}$.

ب ـ تحديد حجم الهرم SMNPQ.

ليكن V' و Vحجم الهرم SMNPQ والهرم SABCD على التوالي

إذن: $V'=\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)V$

أي: $V'=\left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{3} AB^2 \times SO$

($V=\frac{1}{3} AB^2 \times SO$ لأن)

¤ بماأن: $SO = 20cm$ و $BC = 12cm$.

إذن: $V'=120cm^3$