

20 juin 2007

Je remercie vivement les visiteurs de mathsland.com qui sur le forum ont donné leur remarques et commentaires concernant ce corrigé .Je cite notamment :Lhoussein El Mansouri, Mahdi et Aissa EL Houari .Cette quatrième édition est le résultat des révisions et corrections des précédentes . Elle est écrite par le logiciel de traitement de texte spécialisé L^AT_EX.

Réponse 1

I

1. (a) On a : $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} (a\sqrt{2} - 1) (b\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} (2ab - a\sqrt{2} - b\sqrt{2} + 1) = a + b - ab\sqrt{2} = a \perp b$
- (b) On déduit de la question ci-dessus que pour tout a et b de E , on a : $a \perp b \in E$ car sinon on aurait : $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} (a\sqrt{2} - 1) (b\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui signifie $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui est impossible car a et b sont des éléments de E . Donc \perp est bien une loi de composition interne dans E .
2. ● Pour tout $(a, b) \in E^2$, on a : $b \perp a = b + a - ba\sqrt{2} = a + b - ab\sqrt{2} = a \perp b$, donc la loi \perp est commutative.
 - Pour tout $(a, b, c) \in E^3$, on a : $(a \perp b) \perp c = (a + b - ab\sqrt{2}) \perp c = (a + b - ab\sqrt{2}) + c - (a + b - ab\sqrt{2})c\sqrt{2} = a + b + c - (ab + bc + ca)\sqrt{2} + 2abc$
 - on a aussi : $a \perp (b \perp c) = (b \perp c) \perp a = b + c + a - (bc + ca + ab)\sqrt{2} + 2bca$.
 - Ainsi : $(a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$ et la loi \perp est associative .
 - On a : $0 \in E$ et pour tout $a \in E$, on a : $a \perp 0 = a + 0 - a \cdot 0\sqrt{2} = a$; donc 0 est l'élément neutre de la loi commutative \perp .
 - Soit $a \in E$; Résolvons dans E l'équation : (1) $a \perp x = 0$.
 - (1) $\Leftrightarrow a + x - ax\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (1 - a\sqrt{2})x = -a$ et comme $a \in E$, on a : $1 - \sqrt{2}a \neq 0$ et alors : (1) $\Leftrightarrow x = \frac{a}{a\sqrt{2}-1}$; or : $\frac{a}{a\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a\sqrt{2} = a\sqrt{2} - 1$, cette dernière assertion est fautive donc l'équation (1) admet une unique solution dans E pour tout $a \in E$. Ceci veut dire que tout élément a de E est symétrisable par \perp de symétrique : $a' = \frac{a}{a\sqrt{2}-1}$
 - Les quatre points ci-dessus se résument en : (E, \perp) est un groupe commutatif.

II

1. (a) $A = \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; A^2 = \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = -2A$
- $$M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - a & a \\ a & \sqrt{2} - a \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) + \frac{1}{\sqrt{2}} (a \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}) =$$
- $$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = I + \frac{a}{\sqrt{2}}A$$
- (b) Considérons deux éléments $X = M(a)$ et $Y = M(b)$ de \mathcal{F} ; on a d'après la question précédente : $X = I + \frac{a}{\sqrt{2}}A$ et $Y = I + \frac{b}{\sqrt{2}}A$ avec : $(a, b) \in E^2$. Donc :
- $$XY = \left(I + \frac{a}{\sqrt{2}}A\right)\left(I + \frac{b}{\sqrt{2}}A\right) = I + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}}\right)A + \frac{ab}{2}A^2$$
- $$= I + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}}\right)A + \frac{ab}{2}(-2A) = I + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} - ab\right)A = I + \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b - ab\sqrt{2})A$$
- Ainsi : $XY = M(a)M(b) = M(a \perp b)$ et comme $a \perp b \in E$ alors $XY \in \mathcal{F}$, donc \mathcal{F} est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
2. (a) Pour tout $(a, b) \in E^2$ on a vu ci-dessus que : $\varphi(a) \times \varphi(b) = M(a) \times M(b) = M(a \perp b) = \varphi(a \perp b)$, donc φ est un homomorphisme de (E, \perp) vers $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$. φ est surjective car, par définition de \mathcal{F} ses éléments sont de la forme : $\varphi(a)$ avec $a \in E$; en outre φ est injective car pour tout $(a, b) \in E^2$ on a : $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a = b$ par définition de l'égalité de deux matrices.
- (b) Puisque φ est un isomorphisme de (E, \perp) vers (\mathcal{F}, \times) et que (E, \perp) est un groupe commutatif alors (\mathcal{F}, \times) est un groupe commutatif.

Réponse 2

I

1. (a) On a : $(1 + a)(1 + i)u = (1 + i + a + ai)(a + i) = (a + i)^2 + (1 + ai)(a + i) = (a + i)^2 + i(a - i)(a + i) = (a + i)^2 + i(a^2 + 1)$
d'où : $u^2 - (1 + a)(1 + i)u + (1 + a^2)i = (a + i)^2 - (a + i)^2 - i(a^2 + 1) + i(1 + a^2) = 0$;
par conséquent u est une racine de l'équation (E) .
- (b) D'après les relations entre coefficients et racines on sait que : $uv = i(1 + a^2)$, donc : $v(a + i) = i(a - i)(a + i)$, d'où : $v = i(a - i) = 1 + ia$
2. (a) On a : $\frac{u}{v} = \frac{a + i}{1 + ai} = \frac{a + i}{i(a - i)} = -i \frac{(a + i)(\bar{a} + i)}{|a - i|^2}$
 $= -i \frac{|a|^2 - 1 + i(a + \bar{a})}{|a - i|^2} = \frac{2\Re(a)}{|a - i|^2}$; donc : $\frac{u}{v} \in \mathbb{R}$
- (b) On a : $u^2 = (a + i)^2 = a^2 + 2ai - 1$ et $a((a - \bar{a}) + 2i) = a^2 - |a|^2 + 2ai = a^2 + 2ai - 1$; d'où :
- $$u^2 = a((a - \bar{a}) + 2i)$$
- (c) Tout d'abord, on a : $u \neq 0$ car $a \neq -i$, ce qui nous autorise de parler de $\arg u$.
L'égalité ci-dessus nous donne :

$$\arg(u^2) \equiv \arg(2(1 + \Im(a))ia)[2\pi]$$

soit :

$$2 \arg(u) \equiv \frac{\pi}{2} + \arg(a) + \arg(1 + \mathcal{I}m(a))[2\pi]$$

On sait que : $|\mathcal{I}m(a)| \leq |a| = 1$; en particulier : $-1 \leq \mathcal{I}m(a)$ et comme $a \neq -i$ alors $1 + \mathcal{I}m(a) > 0$ donc : $\arg(1 + \mathcal{I}m(a)) \equiv 0[2\pi]$. Ainsi , on a :

$$2 \arg(u) \equiv \frac{\pi}{2} + \arg(a)[2\pi]$$

et, finalement :

$$\arg(u) \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arg(a)[\pi]$$

3. On a :

$$|u| + |v| = |u| + |iv| \geq |u + iv| = |a + i - a + i| = |2i| = 2$$

Donc : $|u| + |v| \geq 2$.

II

1. On a : $|u| + |v| = m \Leftrightarrow |a + i| + |1 + ia| = m \Leftrightarrow |a + i| + |i(a - i)| = m \Leftrightarrow |a + i| + |a - i| = m \Leftrightarrow MF + MF' = m$ Avec $F'(-i)$; $F(i)$ et $M(a)$. Nous avons : $FF' = |i + i| = 2 < m$; d'après la définition bifocale d'une ellipse (E_m) est une ellipse de foyers F' et F . Il en résulte que O milieu de $[F'F]$ est le centre de cette ellipse.

2. (a) $a = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ On a : $MF + MF' = m$

$$MF^2 - MF'^2 = \overrightarrow{MF}^2 - \overrightarrow{MF'}^2 = (\overrightarrow{MF} - \overrightarrow{MF'}) (\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MF'}) = \overrightarrow{F'F} (\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MF'})$$

et comme : $\overrightarrow{F'F}(0, 2)$ et $\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MF'}(-2x, -2y)$ alors : $MF^2 - MF'^2 = -4y$, donc : $(MF + MF')(MF - MF') = -4y$

On a donc : $MF + MF' = m$ et $MF - MF' = \frac{-4y}{m}$ et en sommant on a : $2MF = m - \frac{4y}{m}$. en élevant au carré , on a : $4MF^2 = m^2 + \frac{16y^2}{m^2} - 8y$, ce qui donne :

$$4x^2 + 4(1 - y)^2 = m^2 + \frac{16y^2}{m^2} - 8y$$

$$4x^2 + 4y^2 + 4 = m^2 + \frac{16y^2}{m^2}$$

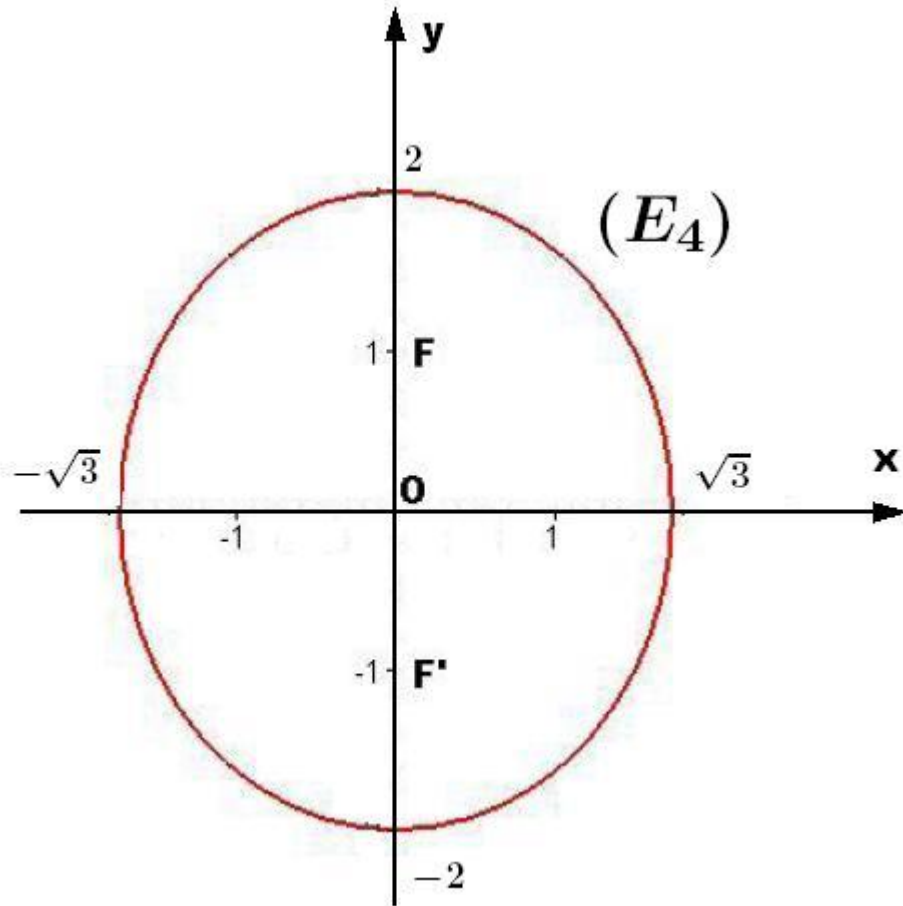
$$x^2 + y^2 + 1 = \frac{m^2}{4} + \frac{4y^2}{m^2}$$

soit, finalement :

$$x^2 + \left(1 - \frac{4}{m^2}\right) y^2 + 1 = \frac{m^2}{4} - 1$$

(b) Dessinons (E_4)

L'équation de (E_4) est : $x^2 + \left(1 - \frac{4}{16}\right) y^2 = \frac{16}{4} - 1$ qui s'écrit : $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$



3. L'équation de $(\Gamma) = (E_{\frac{8}{\sqrt{7}}})$ est :

$$x^2 + \frac{9}{16}y^2 = \frac{9}{7}$$

Une équation de la droite $(D) = (AB) : \begin{vmatrix} x & -\sqrt{3} \\ y-2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, donc :

$$(D) : 2x + \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0$$

Soit $M(a)$ avec $a = x + yi$ un point du plan complexe ; alors : $M \in (D) \cap (\Gamma) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}(2-y)}{2} \\ x^2 + \frac{9}{16}y^2 = \frac{9}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}(2-y)}{2} \\ \frac{3}{4}(2-y)^2 + \frac{9}{16}y^2 = \frac{9}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}(2-y)}{2} \\ (y - \frac{8}{7})^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{3}}{7} \\ y = \frac{8}{7} \end{cases} \text{ .Ainsi :}$$

$(D) \cap (\Gamma) = \left\{ I\left(\frac{3\sqrt{3}}{7} + \frac{8}{7}i\right) \right\}$. Or une équation de la tangente (T) à (Γ) au point I est :

$$\frac{3\sqrt{3}}{7}x + \frac{9}{16}\frac{8}{7}y = \frac{9}{7}$$

donc en multipliant par $\frac{7\sqrt{3}}{9}$:

$$(T) : x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \sqrt{3} = 0$$

il suffit d'examiner les équations respectives de (D) et (T) pour conclure que $(D) = (T)$ et que par conséquent (AB) est la tangente à l'ellipse $(\Gamma) = (E_{\frac{8}{\sqrt{7}}})$ au point I .

Réponse 3

1. (a) On a : $232 = 2^3 \cdot 29$ et $195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$, donc $232 \wedge 195 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 13^0 \cdot 29^0 = 1$

(b) (E) équivaut à :

$$195x - 232y = 195 \cdot 163 - 232 \cdot 137$$

soit :

$$195(x - 163) = 232(y - 137)$$

Alors : $232 | 195(x - 163)$ et comme $232 \wedge 195 = 1$ alors, par le théorème de Gauss : $232 | x - 163$, donc : $(\exists k \in \mathbb{Z}) x = 163 + 232k$; en remplaçant dans (E) on a : $y - 137 = 195k$, donc $(x, y) = (163 + 232k, 137 + 195k)$. réciproquement, tout couple de cette forme est une solution de (E) , donc l'ensemble de solutions de (E) est : $S = \{(163 + 232k, 137 + 195k) / k \in \mathbb{Z}\}$

(c) Supposons que : $195d \equiv 1[232]$ et $0 \leq d \leq 232$; alors :

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) \quad 195d = 1 + 232y \quad \text{et} \quad 0 \leq d \leq 232$$

En particulier, le couple (d, y) est une solution de l'équation (E) ; d'après les résultats qui précèdent :

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) \quad d = 163 + 232k$$

et comme : $0 \leq d \leq 232$ alors : $k = 0$ si bien que $d = 163$; réciproquement 163 réponds bien aux conditions demandées donc $d = 163$ est l'unique solution du problème.

2. 233 est premier car les nombres premiers p tels que : $p^2 \leq 233$ sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13 puisque : $17^2 = 289$; les restes de la division euclidienne de 233 par ces nombres sont :

p	r
2	1
3	2
5	3
7	2
11	2
13	12

Ces restes sont tous non nuls, ce qui prouve que 233 est un nombre premier.

3. (a) si $f(a) = f(b)$ alors $a^{195} \equiv b^{195}[233]$

D'après 1)c) on a : $195d = 1 + 232k$ avec $d = 163$ et $k = 137$ alors :

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a^{195d} \equiv b^{195d}[233] \Rightarrow a^{1+232k} \equiv b^{1+232k}[233]$$

et en appliquant le résultat admis, à savoir : $a^{232} \equiv 1[233]$ et $b^{232} \equiv 1[233]$, il vient : $a \equiv b[233]$ et comme $a \in A$ et $b \in A$ on a : $a = b$.

(b) Si $f(a) = b$ alors $a^{195} \equiv b[233]$, par conséquent : $(a^{195})^d \equiv b^d[233]$, ce qui donne :

$$(1) \quad b^d \equiv a^{195d}[233]$$

La question 1)c) nous donne : $195d = 1 + 232k$ avec $d = 163$. Alors :

$$(2) \quad a^{195d} = a^{1+232k} = a(a^{232})^k$$

Comme : $a^{232} \equiv 1[233]$, on a :

$$(3) \quad a(a^{232})^k \equiv a[233]$$

(1) et (2) et (3) donnent : $b^d \equiv a[233]$, d'où finalement : $b^{163} \equiv a[233]$

(c) L'application f est surjective car la relation $b^{163} \equiv a[233]$ signifie que a est le reste dans la division euclidienne de b^{163} par 233 et un tel reste existe. Or la question 3)a) montre que f est injective, donc f est bijective et pour tout $x \in A$ on a : $f^{-1}(x)$ est le reste dans la division euclidienne de x^{163} par 233.

Réponse 4

I

1. $g(x) = 1 + (x - 1)e^x$, la fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'(x) = e^x + (x - 1)e^x = xe^x$ qui est du même signe que x ; par conséquent $g(0)$ est un minimum absolu de g ; et comme : $g(0) = 0$ alors $g \geq 0$ sur \mathbb{R} .
2. On a $g(0) = 0$ et puisque g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ alors 0 est l'unique solution de l'équation : $g(x) = 0$.

II

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} = \frac{0}{1 - 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{e^x - 1} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} = \frac{0}{0 - 1} = 0$$

2. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$$

car on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

et f est continue au point 0.

3. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - e^x \cdot x}{(e^x - 1)^2} = -\frac{1 + (x - 1)e^x}{(e^x - 1)^2} = -\frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

(b) D'après l'étude faite pour g en $I - 1$) et $I - 2$) on a : $f'(x) < 0$ sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et puisque f est continue sur \mathbb{R} , il en résulte que f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

4. (a) On a $J(x) = \int_0^x te^{-t} dt = [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt = [-te^{-t} - e^{-t}]_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 = e^{-x}(e^x - x - 1)$

(b) On propose pour cette question deux méthodes :

◆◆**Première méthode :**

On va faire un raisonnement par disjonction des cas :

Soit $x \in \mathbb{R}$

premier cas : $x \geq 0$

Puisque la fonction : $t \mapsto e^{-t}$ est décroissante sur \mathbb{R} alors on a pour tout $t \in [0, x]$: $te^{-x} \leq te^{-t} \leq t$; en intégrant entre 0 et x on obtient :

$$\int_0^x te^{-x} dt \leq \int_0^x te^{-t} dt \leq \int_0^x t dt$$

c'est-à-dire :

$$\frac{x^2}{2}e^{-x} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

ce qui veut dire aussi :

$$\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$$

car : $|x| = x$

deuxième cas : $x \leq 0$

Puisque la fonction : $t \mapsto e^{-t}$ est décroissante sur \mathbb{R} alors on a pour tout $t \in [x, 0]$: $t \geq te^{-t} \geq te^{-x}$; (on a changé le sens de l'inégalité car $t \leq 0$) en intégrant entre x et 0 on obtient :

$$\int_x^0 t dt \geq \int_x^0 te^{-t} dt \geq \int_x^0 te^{-x} dt$$

,donc :

$$\int_0^x t dt \leq \int_0^x te^{-t} dt \leq \int_0^x te^{-x} dt$$

(on a multiplié par -1)

c'est-à-dire :

$$\frac{x^2}{2} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2}e^{-x}$$

ce qui veut dire aussi :

$$\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$$

car : $|x| = -x$

◆◆ **Deuxième méthode :**

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons : $a = \min(0, x)$ et $b = \max(0, x)$ alors :

$$J(x) = \int_a^b |t|e^{-t} dt$$

en effet : si $0 \leq x$ alors $a = 0$ et $b = x$ et $\int_a^b |t|e^{-t} dt = \int_0^x |t|e^{-t} dt = \int_0^x te^{-t} dt = J(x)$

si $x \leq 0$ alors : $a = x$ et $b = 0$ et $\int_a^b |t|e^{-t} dt = \int_x^0 |t|e^{-t} dt = \int_x^0 (-t)e^{-t} dt = -\int_0^x (-t)e^{-t} dt = \int_0^x te^{-t} dt = J(x)$ Puisque $a \leq b$ et que la fonction : $t \mapsto e^{-t}$ est strictement décroissante alors :

$$(\forall t \in [a, b]) \quad e^{-b} \leq e^{-t} \leq e^{-a}$$

par suite :

$$(\forall t \in [a, b]) \quad e^{-b}|t| \leq e^{-t}|t| \leq e^{-a}|t|$$

Il s'en suit que :

$$(1) \quad \int_a^b e^{-b}|t| dt \leq \int_a^b e^{-t}|t| dt \leq \int_a^b e^{-a}|t| dt$$

La fonction : $v : t \mapsto \frac{t|t|}{2}$ est une primitive de $u : t \mapsto |t|$ sur \mathbb{R} car :

$$\begin{cases} v(t) = \frac{t^2}{2} & \text{si } t \geq 0 \\ v(t) = -\frac{t^2}{2} & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Il en résulte que

$$\begin{cases} v'(t) = t & \text{si } t \geq 0 \\ v'(t) = -t & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Donc : $v' = u$. Ainsi : (1) devient :

$$(1)' \quad e^{-b}(v(b) - v(a)) \leq J(x) \leq e^{-a}(v(b) - v(a))$$

Par définition de a et b on a : $a \leq 0$ et $b \geq 0$, donc : $v(a) = -\frac{a^2}{2}$ et $v(b) = \frac{b^2}{2}$, dès lors (1)' devient :

$$(1)'' \quad \frac{a^2 + b^2}{2}e^{-b} \leq J(x) \leq \frac{a^2 + b^2}{2}e^{-a}$$

Finalement on a : $a^2 + b^2 = x^2$ et comme $a + b = x$ et $b - a = |x|$ on a $a = \frac{x-|x|}{2}$ et $b = \frac{x+|x|}{2}$. Donc (1)'' devient :

$$\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{e^x}{x^2} J(x)$ et puisque :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad \frac{e^x}{x^2} > 0$$

, il découle de l'inégalité démontrée ci-dessus que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{1}{2} e^x e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \frac{1}{2} e^x e^{-\frac{x-|x|}{2}}$$

c'es-à-dire :

$$\frac{1}{2} e^{\frac{x-|x|}{2}} \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \frac{1}{2} e^{\frac{x+|x|}{2}}$$

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} \left(\frac{x}{e^x - 1} - 1 \right) = -\frac{x}{e^x - 1} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

La double inégalité de la question c) nous donne :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

: c'est clair car les fonctions qui encadrent l'expression du milieu tendent tous vers $\frac{1}{2}$. En outre nous savons que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Il s'en suit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2}$$

Ce qui veut dire que f est dérivable en 0 et : $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

5. (a) On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

Donc :

$$f''(x) = -\frac{g'(x)(e^x - 1)^2 - 2e^x(e^x - 1)g(x)}{(e^x - 1)^4} = -\frac{g'(x)(e^x - 1) - 2e^x g(x)}{(e^x - 1)^3} \text{ et}$$

comme : $g(x) = 1 + (x - 1)e^x$ et $g'(x) = xe^x$, il s'en suit que :

$$f''(x) = -\frac{xe^x(e^x - 1) - 2e^x(1 + (x - 1)e^x)}{(e^x - 1)^3} = -\frac{e^x(xe^x - x - 2 - 2xe^x + 2e^x)}{(e^x - 1)^3}$$

finalement :

$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} (e^x(x - 2) + 2 + x)$$

(b) Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = e^x(x - 2) + 2 + x$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = e^x + e^x(x - 2) + 1 = 1 + e^x(x - 1) = g(x)$$

et comme d'après **I - 1)** $g \geq 0$ sur \mathbb{R} et s'annule uniquement en 0 , il s'en suit que h est strictement croissante sur \mathbb{R} ; or $h(0) = 0$, donc :

$$h > 0 \text{ sur }]0, +\infty[$$

$$h(0) = 0$$

$$h < 0 \text{ sur }]-\infty, 0[.$$

(c) remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

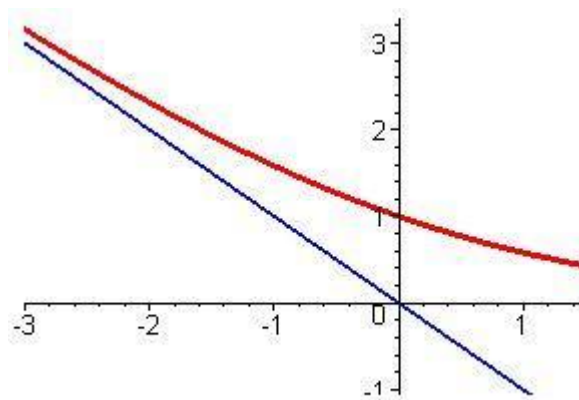
$$f''(x) = \left(\frac{e^x}{(e^x - 1)^4} \right) \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) (xh(x))$$

si bien que $f''(x)$ a le même signe que $xh(x)$ car

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0} > 0$$

puisque $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur \mathbb{R} . Or la question **II - 5)b)** ci-dessus montre que x et $h(x)$ sont de même signe, alors $xh(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, donc : $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

(d) Tracé de l'allure de \mathcal{C}_f . L'étude qui précède montre que \mathcal{C}_f admet la droite d'équation $y = -x$ comme asymptote au voisinage de $-\infty$ et l'axe des abscisses comme asymptote au voisinage de $+\infty$ et \mathcal{C}_f est convexe sur \mathbb{R} .



III

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = x \Leftrightarrow x \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{e^x - 1} = 1 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

Donc l'unique solution de l'équation : $f(x) = x$ est $\ln 2$

2. (a) Comme $f'' > 0$ sur $]0, +\infty[$ alors f' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
 On va montrer que f' est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ pour cela il suffit de
 montrer que f' est continue au point 0, c'est-à-dire que : $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$
 On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{g(x)}{(e^x - 1)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left((-e^x) \left(\frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} \right) \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)^2 \right) = -\frac{1}{2}$$

car on a déjà prouvé que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1 + x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi f' est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+) \quad f'(x) \geq f'(0) = -\frac{1}{2}$$

or on sait que $g \geq 0$ sur \mathbb{R}_+ donc $f' \leq 0$ sur \mathbb{R}_+ . Ainsi : $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, donc : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

- (b) si $u_n = \ln 2$ alors $u_{n+1} = f(\ln 2) = \ln 2$ et l'inégalité demandée est réalisée.
 si $u_n \neq \ln 2$ posons : $a = \min(u_n, \ln 2)$ et $b = \max(u_n, \ln 2)$. alors comme on a vu
 que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} , on peut appliquer le théorème des accroissements
 finis sur $[a, b]$; ainsi il exist $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

donc

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)||b - a|$$

Or :

$$|b - a| = |u_n - \ln 2|$$

et

$$|f(a) - f(b)| = |f(u_n) - f(\ln 2)| = |u_{n+1} - \ln 2|$$

On a d'autre part : $c \in \mathbb{R}_+$ car : $\ln 2 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n > 0$ puisque
 $u_0 = 1 > 0$ et si $n > 1$ alors $u_n = f(u_{n-1}) > 0$ car on sait que $f > 0$. Ainsi $c > 0$
 et on a d'après la question **III - 2)b** :

$$|f'(c)| \leq \frac{1}{2}$$

, on a bien l'inégalité demandée. et comme elle est réalisée dans tous les cas on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$$

(c) Montrons par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Comme $u_0 = 1$ et que $\ln 2 < 1 = \ln e$, on a : $|u_0 - \ln 2| = 1 - \ln 2 \leq 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$
D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|u_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Comme la suite géométrique $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n \geq 0}$ tend vers 0, il en découle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2$$

IV

1. (a) On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$

et on a vu que la fonction f est strictement décroissante sur \mathbb{R} . Ainsi :
Si x est un réel tel que : $x > 0$ alors :

$$(\forall t \in [x, 2x]) \quad f(2x) \leq f(t) \leq f(x)$$

alors :

$$\int_x^{2x} f(2x) dt \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(x) dt$$

c'est-à-dire :

$$(1) \quad x f(2x) \leq F(x) \leq x f(x)$$

Si $x < 0$, on a la même chose sur $[2x, x]$, précisément :

$$(\forall t \in [2x, x]) \quad f(x) \leq f(t) \leq f(2x)$$

alors :

$$\int_x^{2x} f(2x) dt \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(x) dt$$

(on a inversé le sens des inégalités car $x > 2x$)

Alors :

$$(1) \quad x f(2x) \leq F(x) \leq x f(x)$$

Conclusion :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}$$

(b) Comme :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{e^{2x} - 1} \right) x = 1.0 = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) x = 1.0 = 0$$

on a en vertu de la double inégalité ci-dessus : $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0 = F(0)$; donc F est continue au point 0.

(c) D'après la double inégalité de la question $IV - 1)a$) ci-dessus on a :

$$(\forall x \in]0, +\infty[) \quad \frac{2x}{e^{2x} - 1} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{x}{e^x - 1}$$

et comme :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x - 1} = 1$$

alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x} = 1$$

de la même façon , on a :

$$(\forall x \in]-\infty, 0[) \quad \frac{x}{e^x - 1} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{2x}{e^{2x} - 1}$$

et comme :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^x - 1} = 1$$

alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x)}{x} = 1$$

Comme $F(0) = 0$, on a alors

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 1$$

Cela veut dire que F est dérivable au point 0 à droite et à gauche et : $F'_d(0) = F'_g(0) = 1$, par conséquent : F est dérivable au point 0 et $F'(0) = 1$

2. (a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$

La fonction f est continue sur \mathbb{R} , donc elle admet une primitive G sur \mathbb{R} . Ainsi on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad F(x) = G(2x) - G(x)$$

Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto 2x$ sont dérivables sur chacun des intervalles $I =]0, +\infty[$ et $J =]-\infty, 0[$ et réalisent : $u(I) \subset I$ et $u(J) \subset J$ et $v(I) \subset I$ et

$v(J) \subset J$ et comme G est dérivable sur I et J il en résulte que F est dérivable en tout point de \mathbb{R}^* et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2f(2x) - f(x) = 2\frac{2x}{e^{2x} - 1} - \frac{x}{e^x - 1}$$

c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = \frac{x}{e^x - 1} \left(\frac{4}{e^x + 1} - 1 \right) = \frac{3 - e^x}{e^x + 1} f(x)$$

(b) f est continue et strictement décroissante sur \mathbb{R} , donc :

$$f(\mathbb{R}) =] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [=]0, +\infty[$$

Donc f est strictement positive et le signe de $F'(x)$ est le même que celui de $3 - e^x$ car $e^x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Alors

$$\begin{cases} F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 3 \\ F'(x) > 0 \Leftrightarrow 3 - e^x > 0 \Leftrightarrow x < \ln 3 \\ F'(x) < 0 \Leftrightarrow 3 - e^x < 0 \Leftrightarrow x > \ln 3 \end{cases}$$

Ceci veut dire que :

- F est strictement croissante sur $] -\infty, 0]$
- F est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$