وزارة التربية الوطنية و الشباب	**الامتحان التجريبي**	المستوي:2 باك رياضي أ و ب
أكاديمية فاس	**الـريــاضيـات**	مدة الإنجاز: 4 ساعات
نيابة فاس الجديد دارالدبيبغ	ثانوية: ابن حزم	التاريخ: 5مــاي 2004

ملحوظة: يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة.

التمرين 1

ليكن العدد الحقيقي θ من المجال]0, π/2[ونعتبر المستوى العقدي P منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(o,\vec{u},\vec{v})$.

1- حل في C المعادلة : $(E): \ z^2 - \dfrac{2}{\cos\theta} z + \dfrac{5}{\cos^2\theta} - 4 = 0$

2- لتكن النقطتين $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ حيث z_1 و z_2 هما حلي المعادلة (E)

أ- أثبت أن M_1 و M_2 تتغيران على مخروطي (Γ) عندما يتغير العدد θ في المجال]0, π/2[.

ب- أنشئ المخروطي (Γ) في المعلم السابق.

التمرين2

يستقبل تاجر بمكتبه المكالمات الهاتفية للزبناء عبر جهاز هاتف مزود بمجيب آلي(Répondeur) ونفترض ما يلي:

- كلما غادر التاجر مكتبه يشغل دائما المجيب الآلي.
- عندما يكون التاجر حاضرا في المكتب يشغل المجيب الآلي مرة في كل ثلاث مرات.
- عندما يتصل زبون فإن الاحتمال لكي يجيبه المجيب الآلي هو 4/5

1- اتصل زبون بمكتب التاجر. ونعتبر الحدثين:

الحدث R :" الزبون أجابه المجيب الآلي" و الحدث A :" التاجر حاضر في المكتب".

أ- تحقق أن: $p(R)=4/5$ و $p(R/A)=1/3$ و $p(R/\bar{A})=1$ معللا أجوبتك.

ب- عبر عن $p(R)$ بدلالة $p(R/A)$ و $p(A)$. (لاحظ أن $R=(R\cap A)\cup(R\cap\bar{A})$)

ج- استنتج أن $p(A)=3/10$.

2- اتصل زبون وأجابه المجيب الآلي. احسب الاحتمال لكي يكون التاجر حاضرا بالمكتب.

3- ليكن n من IN حيث $n>1$. اتصل عدد n من الزبناء واحد بعد الآخر وبصفة مستقلة .

و ليكن الحدث E :" على الأقل زبونان أجابهما التاجر". ونضع $p_n=p(E)$

أثبت أن : $p_n = 1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^n - \dfrac{n}{5}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}$ واحسب $\lim p_n$.

مسألة1

نعتبر في $M_2(IR)$ المصفوفتين $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}0&1\\3&0\end{pmatrix}$ و نذكر أن: $(M_2(IR),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي و $(M_2(IR),+,\times)$ حلقة واحدية و نعتبر المجموعة: $E=\{M\in M_2(IR)\ /\ J\times M=M\times J\}$

الجزء A

1) بين أن : $E=\{M\in M_2(IR)\ /\ M=x.I+y.J$ و $(x,y)\in IR^2\}$

2) أثبت أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي و أن (I,J) أساس فيه

3) أ- تحقق أن: $J^2=3.I$ وأثبت أن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية تبادلية. هل هي كاملة؟

ب- تحقق أن: $\det(x.I+y.J)=x^2-3y^2$ واستنتج المصفوفات التي تقبل مقلوبا في $(E,+,\times)$

4) نضع $A=2I+J$

أ- بين أن: $\forall n\in IN^*\ \ A^n\in E$

ب- لكل $n>0$ نعتبر (a_n, b_n) زوج إحداثيتي المصفوفة A^n في الأساس (I,J) بين أن :

$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \qquad b_{n+1} = a_n + 2b_n$

ج- تحقق أن $b_1=1$ و $a_1=2$ و أن: $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n \ \ \forall n\in IN^*$ و استنتج a_n بدلالة n لكل n من IN^*

الجزء B

1. أ- أثبت أن: $\forall x\in Z:\ x^2\equiv 0[4]$ أو $x^2\equiv 1[4]$

ب- استنتج البواقي الممكنة في القسمة الاقليدية للعدد x^2-3y^2 على 4 .
ج- أثبت أن المعادلة $x^2-3y^2=-1$ لا تقبل حلا في Z^2 .

2. تحقق أن $\forall n>0,\ a_{n+1}^2-3b_{n+1}^2=a_n^2-3b_n^2$ (استعمل A: 4 –ج) و استنتج أن المعادلة $x^2-3y^2=1$ تقبل مالا نهاية من الحلول في Z^2 .

3. ليكن p عددا أوليا حيث $3<p$ و نفترض أن المعادلة $x^2-3y^2=p$ تقبل على الأقل حلا (x,y) في Z^2 .
أ- أثبت أن $x\wedge y=1$ و $p\wedge y=1$. استنتج باستعمال خاصية Bézout أنه يوجد k من Z بحيث: $ky\equiv 1[p]$
ب- استنتج أن : $\exists q\in Z,\ q^2\equiv 3[p]$.

مسألة2

الجزء الأول

نعتبر المستوى P منسوبا لمعلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر الدالة U المعرفة على IR بمايلي: $U(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

1) بين أن الدالة U فردية وأدرس تغيراتها على IR^+
2) بين أن U تقابل من IR نحو مجال J يتم تحديده (تحديد U^{-1} غير مطلوب)
3) حدد معادلة المماس (T) عند النقطة O(0,0) ثم أنشئ (T) و C_U و $C_{U^{-1}}$ في نفس المعلم السابق
4) أحسب ب cm^2 مساحة الحيز من المستوى المحصور بين C_U و $C_{U^{-1}}$ والمستقيمات التي معادلتها: $x=0$ و $x=1$ و $y=0$ و $y=1$.

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{x+U(x)}\ ,\ x\neq 0 \\ f(0)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

1) أ- تحقق أنf دالة زوجية و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
ب- بين أن f دالة متصلة في 0

2) أ- باستعمال نتيجة مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن لكل 0<x : $x-\dfrac{x^3}{3}<U(x)<x$ (يمكنك ملاحظة $U'(x)=1-U^2(x)$)
ب- تحقق أن $\forall x>0,\ \dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{x-U(x)}{2x^2}f(x)$
ج- استنتج مما سبق أن f قابلة للاشتقاق في 0 و أن $f'(0)=0$.

3) أ- بين أن : $\forall x\in IR^*\ \ f'(x)=\dfrac{x\left(\dfrac{U(x)}{x}-U'(x)\right)}{(x+U(x))^2}$
ب- ليكن x>0 بين أن : $\exists c\in]0,x[:\ \dfrac{U(x)}{x}=U'(c)$
ج- استنتج أن f تزايدية على $[0,+\infty[$ و أثبت أن: $f(IR)=[½, 1[$

الجزء الثالث

نعتبر الدالة F المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x Arc\sin(f(t))dt, x \neq 0 \\ F(0) = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

1) أ- أثبت أن الدالة F معرفة على IR .

ب- أثبت أن F دالة زوجية.

2) باستعمال مبرهنة القيمة المتوسطة أثبت أن: $\forall x>0: \pi/6 \leq F(x) \leq Arcsin(f(x))$ و استنتج أن F متصلة في 0 .

3) أ- أثبـــــــــــــــــت أن $\forall t > 0 : \dfrac{t}{1+t} < f(t) < 1$ و اســــــــــــــــــتنتج أن

$$\forall x > 0 : \frac{1}{x}\int_0^x Arc\sin(\frac{t}{1+t})dt < F(x) < \frac{\pi}{2}$$

ب- أحــــــــــــسب التكامــــــــــــــل $\displaystyle\int_0^x Arc\sin(\frac{t}{1+t})dt$ (لاحـــــــــــــظ أن $\displaystyle\int_0^x Arc\sin(\frac{t}{1+t})dt = \int_0^x (1+t)' Arc\sin(\frac{t}{1+t})dt$) و استنتج أن $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \dfrac{\pi}{2}$

4) أثبت أن F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و أن : $\forall x>0:\ xF'(x) = Arcsin(f(x))-F(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة F على IR (نقبل أن $F'(0)=0$).