4.5 **التمرين الأول :**

في المستوى (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$ ، نعتبر المنحنى (H) ذو المعادلة : $x^2-5y^2=1$

1ن -1 حدد طبيعة (H) ،عناصره المميزة، وأنشئ (H).

-2 لتكن $M(a;b)$ نقطة من (H) حيث a و b من $\mathbb{Z}$.

0.25 أ – تحقق أن a و b أوليان في ما بينهما

0.25 ب – بين أن ليس لـ a و b نفس الزوجية

0.5 ج – بين أنه يوجد عدد صحيح نسبي k بحيث $a=5k+1$ أو $a=5k-1$

0.25 د – احسب $1+5y^2$ لأجل $1\le y\le 4$ و استنتج نقطة من (H) تكون إحداثيثها صحيحة نسبية.

فيما يلي نريد أن نبين أن (H) يمر من عدد لا منته من النقط ذات الإحداثيات الصحيحة .

0.5 3 – أ – بين أن إذا كانت $a;b;c$ و d أعداد صحيحة نسبية فإن : $a+b\sqrt{5}=c+d\sqrt{5}\Leftrightarrow a=c$ و $b=d$

0.25 ب- بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*;\exists(a_n;b_n)\in(\mathbb{N}^*)^2/(9+4\sqrt{5})^n=a_n+b_n\sqrt{5}$

0.5 ج- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*;M(a_n;b_n)\in(H)$

0.25 4 – أ- باستعمال 3-ب-بين أن $(9-4\sqrt{5})^n=a_n-b_n\sqrt{5}$

0.75 ب- احسب a_n و b_n بدلالة n وحدد $\lim(a_n)$

3.75 **التمرين الثاني :**

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x)=x(1-x)$ و نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة ب :

$$\begin{cases} U_0\in\left]0;1\right[\\ U_{n+1}=f(U_n);\forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

0.5 -1 أ – ادرس تغيرات f

0.5 ب- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}:0\prec U_n\prec\dfrac{1}{n+1}$ و استنتج : $\lim U_n$

ج – نضع : $V_n=nU_n;\forall n\in\mathbb{N}$

0.75 بين أن (V_n) متتالية تزايدية ثم استنتج أنها متقاربة و أن نهايتها L تحقق $0\prec L\le 1$

د – نضع : $W_n=n(V_{n+1}-V_n);\forall n\in\mathbb{N}$

0.5 بين أن (W_n) متقاربة و أن $\lim(W_n)=L(1-L)$

2 – في هذا السؤال نفترض أن $L\neq 1$.

0.5 أ – بين أن : $(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N});n\ge n_0\Rightarrow V_{n+1}-V_n\ge\dfrac{L(1-L)}{2n}$

0.5 ب – بين أن $\lim V_n=+\infty$ // يمكن استعمال $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{k}=+\infty$ //

0.5 ج – استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}nU_n=1$

المادة :الرياضيات	مدة الإنجاز: 4 س	ص	2/3
الشعبة : العلوم الرياضية –ب-	المعامل: 10		

التمرين الثالث: 2ن

في المستوى الموجه المنسوب إلى م.م.م. $(o;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط $I(-1)$ و $I'(1)$ و نعتبر الدوران $R_1(I;\frac{\pi}{4})$ و الدوران $R_2(I';\frac{-3\pi}{4})$. لكل نقطة $M(z)$ نضع : $M'(z')=R_1(M)$ و $M''(z'')=R_2(M)$

1 – بين أن $z'+1=e^{i\frac{\pi}{4}}(z+1)$ وأن $z'-1=-e^{i\frac{\pi}{4}}(z-1)$ 0.5

2 – استنتج أن $\frac{z'-z}{z''-z}=-i\frac{z+1}{z-1}\tan\frac{\pi}{8}$ 0.25

3 – بين أن : $(\overline{\overrightarrow{MM'};\overrightarrow{MM''}})=(\overline{\overrightarrow{MI};\overrightarrow{MI'}})+\frac{\pi}{2}[2\pi]$ 0.5

4 – حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون النقط $M;M';M''$ مستقيمية. 0.75

التمرين الرابع: 2.75

نعتبر $M_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الدرجة 2 مزودة بقانون جمع المصفوفات $(+)$ وقانون ضرب مصفوفة في عدد حقيقي $(.)$ وقانون ضرب المصفوفات $(\times)$

لتكن I المصفوفة الوحدة و نعتبر المصفوفة : $A=\begin{pmatrix} a & a^2-a+1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}$ حيث a عدد حقيقي و المجموعة E حيث :

$$E=\{\alpha I+\beta A\,/(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\}$$

1 – أ - بين أن $(E;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي .

ب – بين أن الأسرة $B=(I;A)$ أساس للفضاء المتجهي $(E;+;.)$. 0.5

2 – أ – تحقق أن $A^2=A-I$. 0.25

ب – استنتج أن المصفوفة A تقبل مقلوبا وأن A^{-1} عنصر من E 0.25

3 – أ – بين أن $(E;+;\times)$ حلقة واحدية تبادلية . 0.25

ب – بين أن $(E;+;\times)$ جسم تبادلي (سنحدد زوج إحداثيتي M^{-1} حسب الأساس B) 0.5

4 – حل في المجموعة E المعادلة $X^3=I$. 0.5

0.5

التمرين الخامس: 1.75

1 - حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة $5x-7y=5$ 0.5

2- حدد الأعداد الصحيحة النسبية x بحيث يكون $x\equiv 0[5]$ و $x\equiv 5[7]$. 0.5

3 – ليكن n عددا صحيحا طبيعيا ، كتابته في نظمة العد ذات الأساس 6 هي $n=\overline{\alpha 30002\beta}$; $(\alpha\neq 0)$

حدد α و β لكي يكون n قابلا للقسمة على 35 0.75

المادة :الرياضيات	مدة الإنجاز: 4 س	ص	3/3
الشعبة : العلوم الرياضية –ب-	المعامل: 10		

مسألة : 5.5

I) 1 – أ- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة : $t \mapsto \ln(1+t)$ في المجال $[0;u]$ بحيث $u \succ 0$ بين أن 0.5

$$(1) : \frac{u}{1+u} \prec \ln(1+u) \prec u$$

ب – استنتج أن : $(2) \forall x \neq 0 ; \frac{x^2}{1+x^2} \prec \ln(1+x^2) \prec x^2$ 0.25

2 – احسب التكاملين التاليين حيث $x \succ 1$: $I(x) = \int_1^x \frac{1}{t(t^2+1)} dt$ و $J(x) = \int_1^x \frac{\ln(t^2)}{t} dt$ 0.5

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1 – بين أن f متصلة في 0 0.25

2 – لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

باستعمال المتفاوتة (2) بين أن $(3) : \forall x \in \mathbb{R}^{*+} : \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \leq F(x) \leq \frac{1}{2}x^2$ 0.5

ثم استنتج أن $\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

III) لتكن φ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $\begin{cases} \varphi(x) = \frac{F(x)}{x^2} ; x \neq 0 \\ \varphi(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

1 – بين أن الدالة φ زوجية 0.25

2 – أ – تحقق من أن $\forall x \succ 0 : \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \frac{2F(x) - x^2}{2x^3}$ 0.25

ب – باستعمال المتفاوتتين (2) و (3) بين أن الدالة φ قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر و أن : $\varphi_d'(0) = 0$ 0. 5

3 – أ – بين أن : $\forall x \succ 0 ; \varphi'(x) = \frac{\ln(1+x^2) - 2F(x)}{x^3}$ 0.25

ب – استنتج أن : $\forall x \succ 0 ; \varphi'(x) \prec 0$ 0.25

4 – أ – بين أن : $\forall x \succ 1 : \int_1^x \frac{\ln(1+t^2) - \ln(t^2)}{t} dt = F(x) - F(1) - (\ln x)^2$ 0. 5

ب – باستعمال المتفاوتة (2) بين أن $\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \ln\sqrt{2} \leq \int_1^x \frac{1}{t}\ln(1+\frac{1}{t^2})dt \leq \frac{1}{2}(1-\frac{1}{x^2})$ 0.25

ج – استنتج أن $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ 0.25

5 – ضع جدول تغيرات φ على $\mathbb{R}$ و أنشئ منحناها في م.م.م. $(o;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة 4cm) 0.5